Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 30 IV 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Dla zadanego ciągu a_n niech $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ oraz $T_n = \frac{S_0+\ldots+S_n}{n+1}$. Wykazać, że jeśli ciąg T_n jest ograniczony, to szeregi potęgowe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n x^n$$

są zbieżne dla $|x| < 1$ oraz zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n x^n.$$

Zadanie 2. Rozwinąć następujące funkcje w szereg Taylora wokół punktu x_0:

(a) $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$, $x_0 = 0$, $x \in (-1, 1)$

(b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, $x_0 = 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Zadanie 3. Wyznaczyć szereg Taylora wokół $x = 0$ dla funkcji:

(a) $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$

(b) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

(c) $f(x) = \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$

(d) $f(x) = \ln^2(1 - x)$