Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 9

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach w piątek **14 grudnia.**

Zadanie 1. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem liczb dodatnich takim, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny. Udowodnić nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

i pokazać, że stała 4 po prawej stronie nierówności jest optymalna.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność następujących szeregów w zależności od parametru $\alpha > 0$:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^{\alpha}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)^{\alpha}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\right)^{\alpha}$

Zadanie 3. Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Ustalmy $p > 1$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_1^{1/p}+\ldots+a_n^{1/p}\right)^p}{n^{p-1}} = 0.$$

Zadanie 4. Załóżmy, że $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ są ciągami monotonicznymi malejącymi do 0 i że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są rozbieżne. Czy dla $c_n = \min\{a_n, b_n\}$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ musi być rozbieżny?

Zadanie 5. Czy istnieje taka bijekcja $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^2}$ jest zbieżny?