Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 26 października

Michał Kotowski

Zadanie 1. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$

Zadanie 2. Rozważmy ciąg $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Niech $g_n = cn^\alpha$ dla pewnych $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć takie c i α, aby istniała skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - g_n)$.

Zadanie 3. Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ spełnia $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. Pokazać, że:

(a) Jeśli $q < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Jeśli $q > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Zadanie 4. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ będzie ciągiem ograniczonym spełniającym nierówność $a_{n+1} \geqslant a_n - \frac{1}{2^n}$ dla $n \geqslant 0$. Udowodnić, że $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ jest zbieżny.

Zadanie 5. Niech $x_1, \ldots, x_k$ będą ustalonymi liczbami dodatnimi. Znaleźć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n}{k}}.$$

Zadanie 6. Udowodnić, że jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to wówczas zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}.$$