

# Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 4 grudnia

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Niech  $A$  oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych, które nie zawierają 0 w swoim zapisie dziesiętnym.

(a) Udowodnić, że szereg  $\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$  jest zbieżny.

(b) Rozstrzygnąć, dla jakich  $\alpha > 0$  szereg  $\sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha}$  jest zbieżny.

**Zadanie 2.** Niech  $p_n$  oznacza  $n$ -tą kolejną liczbę pierwszą. Zbadać zbieżność szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ .

**Zadanie 3.** Załóżmy, że  $\{a_n\}_{n \geq 2}$  i  $\{\varphi_n\}_{n \geq 2}$  są ciągami liczb dodatnich, przy czym istnieje taka stała  $K > 0$ , że  $\varphi_n \leq \frac{K}{\log n}$  dla wszystkich  $n \geq 1$ . Udowodnić, że jeżeli szereg  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to szereg  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^{1-\varphi_n}$  również jest zbieżny.