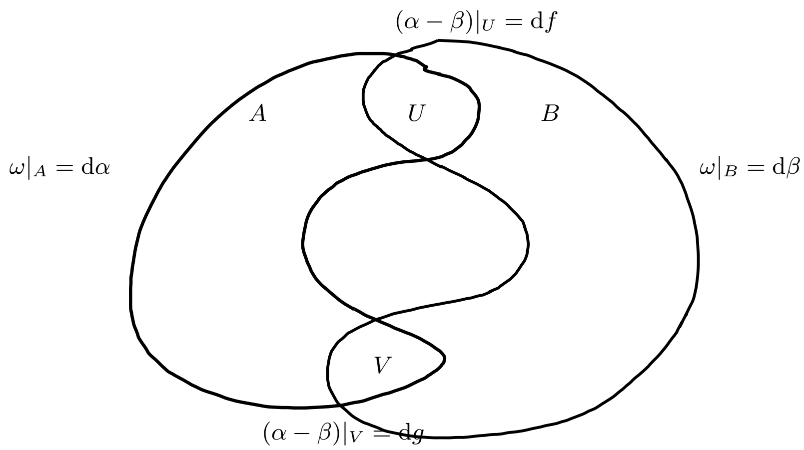
AM II.2 2019/20 (gr. $*$)

9. ćwiczenia zdalne 24 kwietnia 2020
Kohomologie de Rhama

Zadanie 1. Korzystając z techniki Mayera-Vietorisa oblicz $H^2(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$.

Rozwiązanie: Będziemy postępować analogicznie jak w przypadku $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$. Przedstawmy $M = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ jako sumę dwóch obszarów $M = A \cup B$, które oba są dyfeomorficzne z $\mathbb{R}^2$, zaś $A \cap B = U \sqcup V$, gdzie $U, V \simeq \mathbb{R}^2$.



Weźmy teraz dowolną 2-formę (automatycznie zamkniętą) $\omega \in \Omega^2(M)$. Formy $\omega|_A$ i $\omega|_B$ są zamkniętymi 2-formami na obszarach dyfeomorficznych z $\mathbb{R}^2$, a więc są dokładne. Istnieją zatem 1-formy $\alpha \in \Omega^1(A)$ i $\beta \in \Omega^1(B)$ takie, że $\omega|_A = \mathrm{d}\alpha$ i $\omega|_B = \mathrm{d}\beta$. Zauważmy, że wobec $\mathrm{d}\alpha|_U = \omega|_U = \mathrm{d}\beta|_U$ oraz $\mathrm{d}\alpha|_V = \omega|_V = \mathrm{d}\beta|_V$ mamy $\mathrm{d}(\alpha - \beta)|_U = 0$ i $\mathrm{d}(\alpha - \beta)|_V = 0$. Ponieważ oba obszary U i V są homotopijnie trywialne istnieją funkcje $f : U \to \mathbb{R}$ i $g : B \to \mathbb{R}$ takie, że $(\alpha - \beta)|_U = \mathrm{d}f$ oraz $(\alpha - \beta)|_V = \mathrm{d}g$. Zbudujmy teraz dowolną funkcję gładką $F : M \to \mathbb{R}$ taką, że $F|_U = f$ i $F|_V = g$. Wówczas na $U \sqcup V$ zachodzi $\alpha - \beta = \mathrm{d}F$. Na koniec zdefiniujmy 1-formę $\eta \in \Omega^1(M)$ następująco

$$\eta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \alpha(\boldsymbol{x}) & \text{dla } \boldsymbol{x} \in A \\ \beta(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}F(\boldsymbol{x}) & \text{dla } \boldsymbol{x} \in B. \end{cases}$$

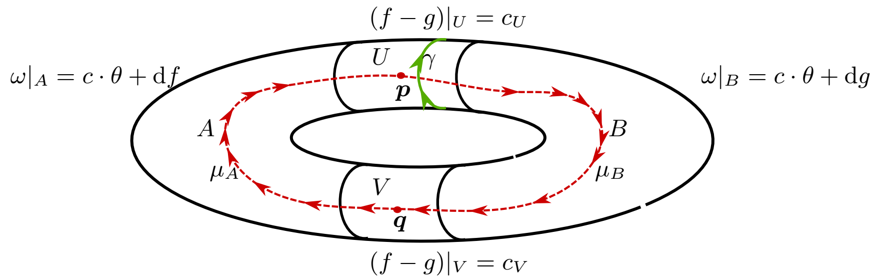
Ponieważ $\alpha = \beta + \mathrm{d}F$ na $A \cap B$, faktycznie η jest gładką 1-formą na $M = A \cup B$. Zauważmy, że

$$\mathrm{d}(\eta|_A) = \mathrm{d}\alpha = \omega|_A \quad \text{oraz} \quad \mathrm{d}(\eta|_B) = \mathrm{d}(\beta + \mathrm{d}F) = \mathrm{d}\beta = \omega|_B \ ,$$

a więc $\omega = \mathrm{d}\eta$ jest formą dokładną. Wnioskujemy, że $H^2(M) = 0$.

Zadanie 2. Wyznacz pierwszą grupę kohomologii de Rhama 2-wymiarowego torusa $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie: Przedstawmy $\mathbb{T}^2 =$ jako sumę dwóch obszarów $M = A \cup B$, które oba są dyfeomorficzne z $S^1 \times (0, 1) \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, zaś $A \cap B = U \sqcup V$, gdzie $U, V \simeq S^1 \times (0, 1)$.



Obliczenie $H^1(\mathbb{T}^2)$. Weźmy dowolną 1-formę zamkniętą $\omega \in \Omega^1(\mathbb{T}^2)$, $\mathrm{d}\omega = 0$. Formy $\omega|_A$ i $\omega|_B$ są zamkniętymi 1-formami na obszarach dyfeomorficznych z $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, a wiec są postaci

$$\omega|_A = c_A \cdot \theta + \mathrm{d}f \quad \text{oraz} \quad \omega|_B = c_B \cdot \theta + \mathrm{d}g \ ,$$

gdzie θ, $\mathrm{d}\theta = 0$ jest generatorem pierwszej grupy kohomologii $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (możemy przyjąć, że w obu obszarach ten generator pochodzi od pojedynczej 1-formy na $\mathbb{T}^2$ mierzącej obieganie wokół małego koła), zaś $f : A \to \mathbb{R}$ i $g : B \to \mathbb{R}$ to funkcje gładkie. Zauważmy, że $c_A = c_B = c$. Istotnie, z naszej wiedzy na temat kohomologii $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ wynika, że $c_A = \int_{\gamma_A} \omega$ gdzie γ_A jest dowolną pętlą w A obiegającą jednokrotnie (z dodatnią orientacją) torus wokół małego koła. Podobnie $c_B = \int_{\gamma_B} \omega$, gdzie γ_B jest dowolną pętlą w B obiegającą jednokrotnie torus wokół małego koła. Możemy oczywiście wybrać taką pętlę $\gamma = \gamma_A = \gamma_B \subset A \cap B$ (albo argumentować, że każde takie dwie pętle są gładko homotopijne), skąd $c_A = c_B = c$.

Zauważmy teraz, że $(\mathrm{d}f - \mathrm{d}g)|_U = \omega|_U - \omega|_U = 0$ i podobnie $(\mathrm{d}f - \mathrm{d}g)|_V = 0$. Wynika stąd, że istnieją stałe c_U oraz c_V takie, że $(f-g)|_U = c_U$ i $(f-g)|_V = c_V$. Jeśli $c_U = c_V = d$, wówczas funkcja $F \in C^\infty(M)$ określona wzorem

$$F(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{dla } \boldsymbol{x} \in A \\ g(\boldsymbol{x}) + d & \text{dla } \boldsymbol{x} \in B \end{cases}$$

jest dobrze określona bo $f = g + d$ na $A \cap B$. Ponadto

$$\omega|_A = c\,\theta + \mathrm{d}F \quad \text{oraz} \quad \omega|_B = c\,\theta + \mathrm{d}F \ ,$$

a zatem $\omega = c\theta + \mathrm{d}F$. Jeśli natomiast $c_U \neq c_V$ wówczas całkując formę ω po pętli $\mu = \mu_A \cup \mu_B$ zaznaczonej na rysunku otrzymamy

$$\int_\mu \omega = c \int_\mu \theta + \int_{\mu_A} \mathrm{d}f + \int_{\mu_B} \mathrm{d}g = 0 + [f(\boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{q})] + [g(\boldsymbol{q}) - g(\boldsymbol{p})] = c_U - c_V \ .$$

Innymi słowy, różnicę $c_U - c_V$ możemy policzyć całkując ω po pętli obiegającej duże koło torusa (oczywiście łatwo znaleźć konkretny przykład takiej formy, aby ta całka była niezerowa). Wynika stąd, że odwzorowanie

$$\omega \longmapsto \left(\int_\gamma \omega, \int_\mu \omega \right)$$

zadaje izomorfizm $H^2(\mathrm{T}^2) \simeq \mathbb{R}^2$.

`Zadania domowe na 28 kwietnia:`

Zadanie 3. Znajdź taką gładką, zamkniętą i dodatnio zorientowaną krzywą $C \subset \mathbb{R}^2$, żeby całka

$$\int_C (4y^3 - 6xy)\mathrm{d}x + (4x - 3x^3)\mathrm{d}y$$

była maksymalna. Oblicz tę całkę dla znalezionej krzywej C.

Zadanie 4. Wyznacz drugą grupę kohomologii de Rhama 2-wymiarowego torusa $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$.
Dla chętnych: Wyznacz kohomolgie de Rhama płaszczyzny z dwoma usuniętymi punktami $\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\}$.

Definicja. Powiemy, że dwie bazy $\{e_1, \ldots, e_k\}$ oraz $\{f_1, \ldots, f_k\}$ zadają tę samą *orientację* przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^k$, gdy wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni. Każda przestrzeń wektorowa ma zatem dwie kanoniczne orientacje.
Orientacją rozmaitości różniczkowej, nazywamy zgodny wybór orientacji jej wszystkich przestrzeni stycznych. Intuicyjnie rozumiemy, że wybrane orientacje zmieniają się w sposób ciągły od punktu do punktu. Formalna definicja wymaga wprowadzenia pojęcia atlasu zorientowanego. Nie wszystkie rozmaitości da się zorientować (np. wstęga Moebiusa). Te które dopuszczają orientację nazywamy *orientowalnymi.*

Zadanie 5. Rozważmy n-wymiarową rozmaitość różniczkową M i n-formę $\omega \in \Omega^n(M)$, która nigdzie nie znika (tzn. dla każdego $p \in M$ istnieją wektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathrm{T}_p M$ takie, że $\omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \neq 0$). Wykaż, że M jest orientowalna. Czy prawdziwa jest implikacja przeciwna?

Zadanie z gwiazdką nadal pozostaje w mocy. Najchętniej widziałbym rozwiązanie nie korzystające z tw. de Rhama. Będę zadowolony już z rozwiązania w wymiarze 2.