AM II.2 2019/20 (gr. $*$)

8. ćwiczenia zdalne 17 kwietnia 2020
Twierdzenie Stokes'a

Zadanie 1. Oblicz całkę z formy $\alpha = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ po połówce torusa sparametryzowanej następująco $(x = (4 + \cos\alpha)\cos\theta, y = (4 + \cos\alpha)\sin\theta, z = \sin\alpha)$, gdzie $\alpha \in [0, 2\pi]$ i $\theta \in [0, \pi]$. Przyjmujemy, że orientacja torusa jest dziedziczona z orientacji $\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\theta$ w $\mathbb{R}^2$ za pomocą rozważanej parametryzacji.

Twierdzenie (Stokes'a). *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie $(k+1)$-wymiarową zorientowaną rozmaitością z brzegiem ∂M. Rozważmy k-formę $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, wówczas*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \ ,$$

gdzie ∂M ma naturalną orientację dziedziczoną z M:

$$\boldsymbol{or}_M = \{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{or}_{\partial M}\} \ .$$

$\boldsymbol{n}$ oznacza tutaj wektor normalny do brzegu ∂M skierowany na zewnątrz M.

Twierdzenie Stokes'a stanowi daleko idące uogólnienie Zasadniczego Twierdzenia Analizy.

Twierdzenie (Stokes'a). *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie $(k+1)$-wymiarową zorientowaną rozmaitością z brzegiem ∂M. Rozważmy k-formę $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, wówczas*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \ ,$$

gdzie ∂M ma naturalną orientację dziedziczoną z M:

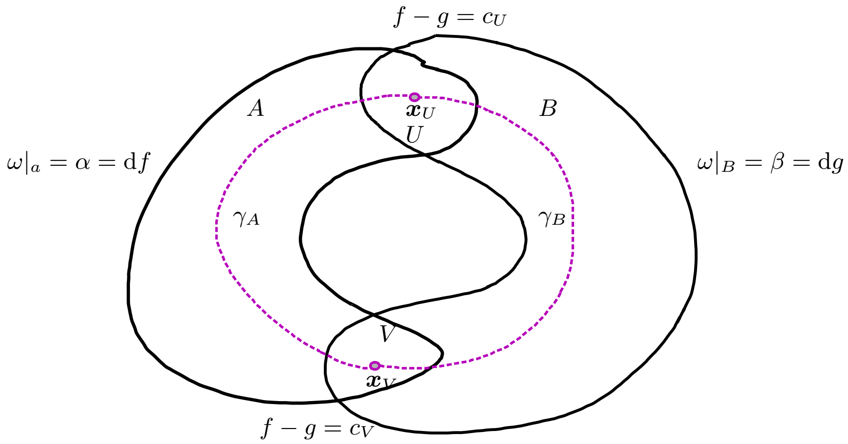
$$\boldsymbol{or}_M = \{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{or}_{\partial M}\} \ .$$

$\boldsymbol{n}$ oznacza tutaj wektor normalny do brzegu ∂M skierowany na zewnątrz M.

Twierdzenie Stokes'a stanowi daleko idące uogólnienie Zasadniczego Twierdzenia Analizy.

Zadanie 2. Korzystając z techniki Mayera-Vietorisa oblicz $H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$.

Rozwiązanie: Przedstawmy $M = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ jako sumę dwóch obszarów $M = A \cup B$, które oba są dyfeomorficzne z $\mathbb{R}^2$, zaś $A \cap B = U \sqcup V$, gdzie $U, V \simeq \mathbb{R}^2$.



Weźmy teraz dowolną 1-formę zamkniętą $\omega \in \Omega^1(M)$. Formy $\alpha := \omega|_A$ i $\beta := \omega|_B$ są zamkniętymi 1-formami na obszarach dyfeomorficznych z $\mathbb{R}^2$, a więc są dokładne. Istnieją zatem funkcje $f : A \to \mathbb{R}$ i $g : B \to \mathbb{R}$ takie, że $\alpha = \mathrm{d}f$ i $\beta = \mathrm{d}g$. Zauważmy, że wobec $\alpha|_U = \omega|_U = \beta|_U$ oraz $\alpha|_V = \omega|_V = \beta|_V$ mamy $\mathrm{d}(f-g)|_U = 0$ i $\mathrm{d}(f-g)|_V = 0$. Istnieją zatem stałe $c_U, c_V \in \mathbb{R}$ takie, że $(f-g)|_U = c_U$ oraz $(f-g)|_V = c_V$. Jeśli $c_U = c_V = c$ wówczas

$$F(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{dla } \boldsymbol{x} \in A \\ g(\boldsymbol{x}) + c & \text{dla } \boldsymbol{x} \in B \end{cases}$$

jest funkcją gładką $F : M \to \mathbb{R}$, taką że $\mathrm{d}F|_A = \mathrm{d}f = \alpha = \omega|_A$ oraz $\mathrm{d}F|_B = \mathrm{d}(g+c) = \mathrm{d}g = \beta = \omega|_B$, czyli $\mathrm{d}F = \omega$. Przeciwnie, jeśli $c_1 \neq c_2$ wówczas dla pętli $\gamma = \gamma_A \cup \gamma_B$ obiegającej $\mathbf{0}$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara jak na rysunku mamy

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_A} \omega + \int_{\gamma_B} \omega = \int_{\gamma_A} \alpha + \int_{\gamma_B} \beta = \int_{\gamma_A} \mathrm{d}f + \int_{\gamma_B} \mathrm{d}g = [f(\boldsymbol{x}_U) - f(\boldsymbol{x}_V)] + [g(\boldsymbol{x}_V) - g(\boldsymbol{x}_U)] =$$
$$(f-g)(\boldsymbol{x}_U) - (f-g)(\boldsymbol{x}_V) = c_U - c_V \neq 0 \ .$$

A zatem pokazaliśmy, że $\int_\gamma \omega = c_U - c_V$ i jeśli $c_U - c_V = 0$ to $\omega = \mathrm{d}F$. A zatem odwzorowanie

$$\omega \longmapsto \int_\gamma \omega = c_U - c_V \quad \text{zadaje izomorfizm} \qquad H^1(M) \simeq \mathbb{R} \ .$$

`Zadania domowe na 24 kwietnia 2020:`

Zadanie 3. Znajdź taką gładką, zamkniętą i dodatnio zorientowaną krzywą $C \subset \mathbb{R}^2$, żeby całka

$$\int_C (4y^3 - 6xy)\mathrm{d}x + (4x - 3x^2)\mathrm{d}y$$

była maksymalna. Oblicz tę całkę dla znalezionej krzywej C.

Zadanie 4. Wyznacz drugą grupę kohomologii de Rhama płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Przypomnijmy, że $H^2(M)$ to zbiór klas równoważności 2-form zamkniętych $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{d}\omega = 0$, gdzie

$$\omega \sim \omega' \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy istnieje } \alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2) \text{ taka, że } \omega - \omega = \mathrm{d}\alpha.$$

Dla chętnych: wyznacz drugą grupę kohomologii de Rhama płaszczyzny bez punktu $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$.

Zadanie 5. Rozważmy rozmaitość M i jej pokrycie dwoma zbiorami otwartymi $A, B \subset M$. Zdefiniujmy odwzorowania $i_k : \Omega^k(A \cup B) \to \Omega^k(A) \oplus \Omega^k(B)$ i $p_k : \Omega^k(A) \oplus \Omega^k(B) \to \Omega^k(A \cap B)$ dane wzorami:

$$i_k(\omega) = (\omega|_A, \omega|_B) \quad \text{oraz} \quad p_k(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)|_{A \cap B} \ .$$

Wykaż, że ciąg $\Omega^k(A \cup B) \xrightarrow{i_k} \Omega^k(A) \oplus \Omega^k(B) \xrightarrow{p_k} \Omega^k(A \cap B)$ jest krótkim ciągiem dokładnym, tzn.

a) $p_k(i_k) = 0$,

b) i_k jest włożeniem,

c) p_k jest suriekcją

d) $\ker p_k = \operatorname{im} i_k$.

Zadanie 6. $(*)$ Rozważmy n-formę $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ o zwartym nośniku, taką że $\int_{R^n} \omega = 0$. Wykaż, że istnieje $(n-1)$-forma o zwartym nośniku $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}\eta$.
