**AM II.2 2019/20 (gr. $*$)**

# 7. ćwiczenia zdalne 8 kwietnia 2020
# Homotopie, pullback formy różniczkowej

**Zadanie 1.** Udowodnij, że lemat o równości całki z 1-formy zamkniętej na drogach homotopijnych jest równoważny twierdzeniu, że na w obszarze gwiaździstym całka z 1-formy zamkniętej nie zależy od drogi.

**Definicja.** *Cofnięciem* (*przeciągnięciem*, albo *pull-backiem*) formy $\omega \in \Omega^1(U)$ za pomocą odwzorowania gładkiego $\Phi : V \to U$ nazywamy formę $\Phi^*\omega \in \Omega^1(V)$ określoną wzorem

$$\Phi^*\omega(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}] = \omega(\Phi(\boldsymbol{x}))[D_{\boldsymbol{x}}\Phi[\boldsymbol{v}]] \ .$$

Innymi słowy, aby policzyć wartość formy $\Phi^*\omega$ na wektorze $\boldsymbol{v}$ w punkcie $\boldsymbol{x}$ przepychamy ten wektor do $U$ za pomocą pochodnej $\Phi$ i liczymy wartość formy $\omega$ na obrazie.
*Uwaga:* $\Phi$ nie musi być dyfeomorfizem, a nawet $U$ i $V$ nie muszą być tego samego wymiaru!

**Lemat 1.** *Dla funkcji $f : U \to \mathbb{R}$ zachodzą wzory $\Phi^* f(\boldsymbol{x}) = f(\Phi(\boldsymbol{x}))$ (pull-back funkcji to po prostu złożenie) oraz $\Phi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\Phi^* f)$ (przeciąganie jest przemienne z operacją różniczki zewnętrznej $\mathrm{d}$). Z ich pomocą można policzyć pull-back każdej formy.*

*Zatem w praktyce, na przykład, dla $\Phi : (r, \phi) \mapsto (x = r\cos\phi, y = r\sin\phi)$ i $\omega = y^2\mathrm{d}x$, aby obliczyć $\Phi^*\omega$ wstawiamy po prostu wyrażenia $x = r\cos\phi$ i $y = r\sin\phi$ do wzoru na $\omega$:*

$$\Phi^*(y^2\mathrm{d}x) = (r\sin\phi)^2\mathrm{d}(r\cos\phi) = r^2\sin^2\phi(\cos\phi\mathrm{d}r - r\sin\phi\mathrm{d}\phi) \ .$$

**Zadanie 2.** Oblicz pull-back $\Phi^*\omega$ dla $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ i $\Phi(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$.

**Zadanie 3.** Znajdź postać formy $\omega = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ we współrzędnych biegunowych $\Phi(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi))$.

**Zadanie 4.** Rozważmy odwzorowanie gładkie $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Wyraź formę

$$\omega = \mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n$$

za pomocą form $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_n$, gdzie $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ to standardowe współrzędne w $\mathbb{R}^n$.

**Zadanie 5.** Zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ jest dyfeomorficzny z kulą $B^n(\mathbf{0}, 1)$. Wykaż, że każda 1-forma zamknięta $\omega \in \Omega^1(U)$ jest dokładna.

**Definicja.** Powiemy, że dwie bazy $\{e_1, \dots, e_k\}$ oraz $\{f_1, \dots, f_k\}$ zadają tę samą *orientację* przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^k$, gdy wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni. Każda przestrzeń wektorowa ma zatem dwie kanoniczne orientacje.
*Orientacją* rozmaitości różniczkowej, nazywamy zgodny wybór orientacji jej wszystkich przestrzeni stycznych. Intuicyjnie rozumiemy, że wybrane orientacje zmieniają się w sposób ciągły od punktu

do punktu. Formalna definicja wymaga wprowadzenia pojęcia atlasu zorientowanego. Nie wszystkie rozmaitości da się zorientować (np. wstęga Moebiusa). Te które dopuszczają orientację nazywamy *orientowalnymi.*

**Definicja** (Całka z $k$-formy różniczkowej)**.** Dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^k$ z kanoniczną orientacją $\{e_1, \ldots, e_k\}$ definiujemy

$$\int_U f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k = \int_U f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\lambda^k(\boldsymbol{x}) \ ,$$

a więc całka z $k$-formy $f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ pokrywa się ze standardową całką Lebesgue'a, z dokładnością do zmiany znaku przy innym wyborze orientacji. Formę $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ nazywamy *formą objętości.*

Całkę z formy różniczkowej na podrozmaitości definiujemy przechodząc od krzywych do płaskich współrzędnych.

Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie $k$-wymiarową podrozmaitością zorientowaną. *Całkę z $k-$formy $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ na $S$* definiujemy jako

$$\int_S \alpha = \int_U \Phi^* \alpha \ ,$$

gdzie $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ jest dowolną parametryzacją $S = \Phi(U)$ zgodną z orientacją $S$. To znaczy, jeśli $\{e_1, \ldots, e_k\}$ jest standardową orientacją $\mathbb{R}^k$, to baza $\{D\Phi(e_1), \ldots, D\Phi(e_k)\}$ jest zgodna z orientacją $S$.

`Zadania domowe na 17 kwietnia:`

**Zadanie 6.** Niech $\boldsymbol{F} = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym (gładkim odwzorowaniem z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$). Wykaż, że odwzorowanie:

$$\eta_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) : (\mathbb{R}^3)^2 \ni (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle \in \mathbb{R}$$

jest 2-formą różniczkową w $\mathbb{R}^3$. Wyraź tę formę w bazie $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$.

**Zadanie 7.** Rozważmy dwuwymiarową rozmaitość zorientowaną $S \subset \mathbb{R}^3$ i niech $\boldsymbol{F} = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym, zaś $\eta_{\boldsymbol{F}} = f\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - g\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + h\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Wykaż, że

$$\int_S \eta_{\boldsymbol{F}} = \int_S \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \rangle \mathrm{d}\sigma_2(\boldsymbol{x}) \ ,$$

gdzie $\sigma_2$ oznacza miarę powierzchniową na $S$, zaś $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ to wektor normalny zewnętrzny do $S$ w punkcie $\boldsymbol{x} \in S$.

**Zadanie 8.** Zbadać, czy forma $\omega = |x+y|\mathrm{d}x + |x+y|\mathrm{d}y$ ma w $\mathbb{R}^2$ własność niezależności całki od drogi?