AM II.2 2019/20 (gr. $*$)

6. ćwiczenia zdalne 3 kwietnia 2020
Dokładność, zamkniętość, homotopie i kohomologie

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli 1-forma $\alpha = g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ jest dokładna to zachodzi równość $g'_y = h'_x$. Sprawdź, że własność ta zachodzi dla formy $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$, ale że nie jest to forma dokładna.

Zadanie 2. Wykaż, że forma $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ jest dokładna w $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$ i znajdź jakąś jej funkcję pierwotną.

Operację różniczki zewnętrznej d *możemy rozszerzyć na zbiór* $\Omega^1(U)$ *postulując następujące własności dla* $f \in C^\infty(U)$ *oraz* $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0, \quad \mathrm{d}(f \cdot \alpha) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f\mathrm{d}(\alpha), \quad \mathrm{d}(\alpha + \beta) = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta \ .$$

Wynika stąd, że

$$\mathrm{d}\left(\sum_i g_i \mathrm{d}f_i\right) = \sum_i \mathrm{d}g_i \wedge \mathrm{d}f_i \ .$$

Przykład. Zauważmy, że forma $\omega = g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ jest zamknięta wtedy i tylko wtedy gdy $g'_y = h'_x$. Istotnie

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}y = (g'_x\mathrm{d}x + g'_y\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x + (h'_x\mathrm{d}x + h'y\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}y = (g'_y - h'_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ .$$

Definicja. Formę $\omega \in \Omega^1(U)$ nazwiemy *zamkniętą* gdy $\mathrm{d}\omega = 0$. Zauważmy, że każda forma dokładna jest zamknięta, ale niekoniecznie odwrotnie, czego dowodzi przykład $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Co więcej, jak widzimy z rozpatrywania tej samej formy na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$ to czy dana forma zamknięta czy nie może zależeć od topologii rozpatrywanego zbioru. *Pierwszą grupą kohomologii de Rhama* przestrzeni U nazywamy iloraz formy zamknięte na U modulo formy dokładne na U:

$$H^1(U) = \ker \mathrm{d}\Omega^1(U)/\mathrm{d}\Omega^0(U) \ .$$

Przykład. Na wykładzie zobaczyliśmy, że każda forma zamknięta na $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ jest postaci

$$\omega = c \cdot \theta + \mathrm{d}f \ ,$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$, $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ zaś $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$. Stąd $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) = \mathbb{R}$, oraz klasa $[\theta]$ jest generatorem $H^1(U)$. Ponadto stałą c dla danej formy zamkniętej ω można wyznaczyć całkując ω po okręgu obiegającym $\mathbf{0}$:

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} \omega = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} (c \cdot \theta + \mathrm{d}f) = c\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} \theta = c \ .$$

Ponadto na wykładzie dowodziliśmy następujące twierdzenie

Twierdzenie. *Każda forma zamknięta na obszarze gwiaździstym jest dokładna. Innymi słowy jeśli* $U \subset \mathbb{R}^n$ *jest obszarem gwiaździstym, to* $H^1(U) = \{0\}$.

Formy różniczkowe wszystkich stopni $\Omega^\bullet(U) = \bigoplus_{k=1} \Omega^k(U)$ *wraz z operacją* $\wedge$ *tworzą* algebrę przemienną z gradacją *(tzn. przemienność nie jest standardowa, ale gradowana), a więc operacja* $\wedge$ *respektuje stopnie*

$$\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \longrightarrow \Omega^{k+l}(U)$$

oraz jest przemienna w następującym sensie

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg\alpha \cdot \deg\beta} \beta \wedge \alpha \ .$$

Cała algebra $\Omega^\bullet(U)$ *jest generowana przez funkcje gładkie* $g \in C^\infty(U)$*, 1-formy dokładne* $\mathrm{d}f$*, gdzie* $f \in C^\infty(U)$ *i operację* $\wedge$*. Wobec tego, aby określić operację* różniczkowania zewnętrznego d *na formy dowolnych stopni wystarczy przyjąć*

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0, \quad \mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)\alpha \wedge (\mathrm{d}\beta), \quad \mathrm{d}(\alpha + \beta) = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta \ .$$

Struktura $(\Omega^\bullet(U), \wedge, \mathrm{d} : \Omega^\bullet(U) \to \Omega^{\bullet+1}(U))$ *to przykład* algebry przemiennej z gradacją i różniczką (stopnia 1)*, ang.* differential graded-commutative algebra.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli krzywe $\gamma, \eta : [0,1] \to U \subset \mathbb{R}^n$ o końcach $a, b \in U$ są gładko homotopijne w U, (tj. istnieje odwzorowanie gładkie $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ takie, że $H(t,0) = \gamma(t)$, $H(t,1) = \eta(t)$ oraz $H(0,s) = a$, $H(1,s) = b$) oraz jeśli $\omega \in \Omega^1(U)$ jest 1-formą zamkniętą to

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega \ .$$

Innymi słowy, forma zamknięta która nie jest dokładna może nie mieć własności niezależności całki od drogi, ale całka z takiej formy zależy tylko od klasy homotopii rozważanej drogi.

`Zadania domowe na 8 kwietnia:`

Zadanie 4. Niech $\gamma, \eta : [0,1] \to U \subset \mathbb{R}^n$ będą dwoma krzywymi zamkniętymi i niech $\omega \in \Omega^1(U)$ będzie 1-formą zamkniętą. Wykaż, że jeśli krzywe te są gładko homotopijne, tzn. istnieje odwzorowanie gładkie $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ takie, że $H(t,0) = \gamma(t)$, $H(t,1) = \eta(t)$ oraz $H(0,s) = H(1,s)$ (warunek ustalonych końców zastępujemy warunkiem zgodności końca i początku), to wówczas

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega \ .$$

Dla chętnych: wykaż, że teza jest prawdziwa jeśli zbiór U zastąpimy dowolną rozmaitością różniczkową M. *Wskazówka*: formy na rozmaitości możemy zdefiniować lokalnie w dziedzinach poszczególnych map.

Zadanie 5. Wykaż, że dla dowolnej k-formy $\omega \in \Omega^k(U)$ zachodzi $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

Zadanie 6. Niech $C = \{(x,y) \mid 4x^2 + y = 5, y \geq 1\}$ będzie krzywą zorientowaną w kierunku wzrastania zmiennej x oblicz całkę

$$\int_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} \ .$$
