AM II.2 2019/20 (gr. $*$)

5. ćwiczenia zdalne 31 marca 2020
Wprowadzenie do form różniczkowych

Zadanie 1. Rozważmy suriekcję liniową $L : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ i niech $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ będzie zbiorem mierzalnym. Wykaż że

$$\sqrt{\det(L \cdot L^T)} \cdot \lambda_{n+k}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_k(A \cap L^{-1}(\boldsymbol{y}))\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} \ .$$

Sybmol σ_k oznacza tutaj miarę powierzchniową na zbiorze $L^{-1}(\boldsymbol{y})$. Powyższy wzór jest pewnym uogólnieniem twierdzenia Fubini'ego – przypadek gdy L jest rzutem na pierwsze n współrzędnych.

Rozwiązanie: Podstawowy pomysł polega na tym aby „wyprostować" zbiór A, by móc użyć standardowego twierdzenia Fubini'ego. W naszych rozważaniach przez $\boldsymbol{x}$ będziemy oznaczali wektory w $\mathbb{R}^k$, zaś przez $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$ wektory w $\mathbb{R}^n$. Każde przekształcenie liniowe A na $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ możemy przestawić jako $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = A_1\boldsymbol{x} + A_2\boldsymbol{y}$. Rozważmy przekształcenie

$$\Phi : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \longmapsto (\boldsymbol{x}, L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})) = (\boldsymbol{x}, L_1\boldsymbol{x} + L_2\boldsymbol{z}) \ ,$$

które faktoryzuje L przez projekcję na drugą część zmiennych. Z założenia na temat L widzimy, że Φ to izomorfizm liniowy o wyznaczniku $\det\Phi = \det L_2$. Przekształcenie odwrotne do niego jest postaci

$$\Phi^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, W_1\boldsymbol{x} + W_2\boldsymbol{y}) \ .$$

Mamy

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ W_1 & W_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ W_1 + W_2 \cdot L_1 & W_2 \cdot L_2 \end{pmatrix} \ ,$$

skąd $W_2 = (L_2)^{-1}$ oraz $W_1 = -W_2L_1 = -(L_2)^{-1}L_1$.

Zauważmy teraz, że odwzorowanie

$$\boldsymbol{x} \longmapsto (\boldsymbol{x}, W_1\boldsymbol{x} + W_2\boldsymbol{y})$$

jest parametryzacją zbioru $L^{-1}(\boldsymbol{y}) \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Wobec tego

$$\sigma_k(A \cap L^{-1}(\boldsymbol{y})) = \int_{A'_{\boldsymbol{y}}} \sqrt{\det(I_k + W_1(W_1)^T)}\mathrm{d}^k\boldsymbol{x} = \sqrt{\det(I_k + W_1(W_1)^T)} \cdot \lambda_k(A'_{\boldsymbol{y}}) \ ,$$

gdzie $A'_{\boldsymbol{y}} = \Phi(A) \cap \mathbb{R}^n \times \{\boldsymbol{y}\}$. Wobec tego

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_k(A \cap L^{-1}(\boldsymbol{y}))\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = \sqrt{\det(I_k + W_1(W_1)^T)} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_k(A'_{\boldsymbol{y}})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} \stackrel{\text{Fub.}}{=} \sqrt{\det(I_k + W_1(W_1)^T)} \cdot \lambda_{n+k}(\Phi(A)) =$$
$$\sqrt{\det(I_k + W_1(W_1)^T)} \cdot |\det\Phi| \cdot \lambda_{n+k}(A)$$

Zauważmy na koniec, że

$$\sqrt{\det(I_k + W_1(W_1)^T)}|\det\Phi| = \sqrt{\det(I_k + W_1(W_1)^T)}\sqrt{\det[L_2(L_2)^T]} =$$
$$\sqrt{\det(I_k + (L_2)^{-1}L_1(L_1)^T(L_2)^{-T}) \cdot \det[L_2(L_2)^T]} = \sqrt{\det[L_1(L_1)^T + L_2(L_2)^T]} = \sqrt{\det(LL^T)} \ .$$

Definicja. Niech $U \subset \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ będzie zbiorem otwartym. *Jedno-formą na U* nazywamy rodzinę funkcjonałów liniowych $\omega : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ gładko indeksowaną punktami zbioru U. Innymi słowy, dla ustalonego $\boldsymbol{x} \in U$ funkcja $\omega(\boldsymbol{x})$ jest elementem przestrzeni $(\mathbb{R}^n)^*$. Dobrze jest myśleć, że $\omega(x)$ to odwzorowanie liniowe na przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_{\boldsymbol{x}} U \simeq \mathbb{R}^n$. Piszemy zwyczajowo $\langle \omega(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle$ albo $\omega(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}]$. Zbiór wszystkich jedno-form na U oznaczmy symbolem $\Omega^1(U)$. Każdy element $\omega \in \Omega^1(U)$ możemy jednoznacznie przedstawić jako

$$\omega = f_1 \cdot \mathrm{d}x_1 + f_2 \cdot \mathrm{d}x_2 + \dots f_n \cdot \mathrm{d}x_n \ ,$$

gdzie f_i są funkcjami gładkimi na U, zaś $\{\mathrm{d}x_i\}$ oznacza bazę $\mathbb{R}^n = \mathrm{T}_{\boldsymbol{x}} U$ dualną do bazy standardowej $\{e_i\}$. Innymi słowy $\langle \mathrm{d}x_i, \boldsymbol{v} \rangle = v_i$.

Analogicznie, dla $k \in \mathbb{N}$ definiujemy *k-formę na U* jako odwzorowanie gładkie $\eta : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, gdzie $\Lambda^k V^*$ oznacza przestrzeń form k-liniowych antysymetrycznych na V. Zbiór wszystkich k-form na U oznaczamy $\Omega^k(U)$. Zwyczajowo definiuje się również $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$. Element $\eta \in \Omega^k(U)$ możemy jednoznacznie zapisać jako

$$\eta = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} f_{i_1 i_2 \dots i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \ ,$$

gdzie $f_{\boldsymbol{\alpha}}$ są funkcjami gładkimi, zaś $\{\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\}$ oznacza bazę przestrzeni $\Lambda^k(\mathrm{T}_{\boldsymbol{x}} U)^*$.

Przykład. Rozważmy funkcję gładką $f \in C^\infty(U)$. Jej pochodną $\mathrm{d}f$ w punkcie $\boldsymbol{x} \in U$ definiowaliśmy jako przekształcenie liniowe $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) : \mathrm{T}_{\boldsymbol{x}} U \to \mathbb{R}$. Wobec tego jest to naturalny przykład jedno-formy na U. Zauważmy, że $\langle \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle = \partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) v_i$, skąd

$$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \ .$$

Mówimy, że $\mathrm{d}f$ to *różniczka zewnętrzna* funkcji f, zaś formę $\omega \in \Omega^1(U)$ postaci $\omega = \mathrm{d}f$ dla pewnej funkcji $f \in C^\infty(U)$ nazywamy *dokładną*. Z kolei f nazywamy *funkcją pierwotną* formy ω.

Zadanie 2. Czy forma

$$\omega = (1 + \sin y)\mathrm{d}x + (2y + x\cos y)\mathrm{d}y$$

jest dokładna? Jeśli tak to jak wyglądają wszystkie funkcje pierwotne ω?

Zadanie 3. Niech $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow F(U) \subset \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem. Wykaż, że każdą 1-formę ω na U możemy jednoznacznie zapisać w postaci

$$\omega = \sum_i g_i \cdot \mathrm{d}f_i \ ,$$

gdzie g_i są funkcjami gładkimi.

Definicja. Rozważmy krzywą gładką $\gamma : [a, b] \to U \subset R^n$ oraz 1-formę $\omega \in \Omega^1(U)$. Przyjmujemy, że γ jest *zorientowana* od początku $\gamma(a)$ do końca $\gamma(b)$. *Całką z formy ω wzdłuż γ* nazywamy wielkość

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \mathrm{d}t \ .$$

Powiemy, że $\omega \in \Omega^1(U)$ ma *własność niezależności całki od drogi*, gdy dla każdych dwóch krzywych zorientowanych $\gamma, \gamma' \subset U$ o wspólnych początkach i końcach zachodzi

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega \ .$$

Zadanie 4. Wykaż, że wartość całki $\int_\gamma \omega$ nie zależy od wyboru konkretnej parametryzacji krzywej γ.

`Zadania domowe na 3 kwietnia 2020:`

Zadanie 5. Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ po łuku elipsy $E = \{(2\cos\phi, 3\sin\phi) \mid \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ zorientowanym według rosnącego kąta ϕ.

Zadanie 6. Wykaż, że każda forma dokładna ma własność niezależności całki od drogi. Oblicz całkę z $\omega = (1+\sin y)\mathrm{d}x + (2y + x\cos y)\mathrm{d}y$ wzdłuż krzywej $\gamma(t) = (t, \sin^2 t)$, gdzie $t \in [0, 4\pi]$ zorientowanej w kierunku rosnącego t.

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym spójnym i jeśli forma $\omega \in \Omega^1(U)$ ma własność niezależności całki od drogi to ω jest dokładna w U.
