AM II.2 2019/20 (gr. $*$)

4. ćwiczenia zdalne 27 marca 2020
Miara powierzchniowa

Zadanie 1. Rozważmy krzywą $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1 o nigdzie nie znikającej pochodnej i niemającą samoprzecięć. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją ciągłą i zdefiniujmy $M = \{(\boldsymbol{x}, y) \in R^n \times \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma(a,b), 0 < y < f(\boldsymbol{x})\}$. Wykaż, że

$$\sigma_2(M) = \int_{\gamma(a,b)} f(\gamma(t))\mathrm{d}\sigma_1(t) \ ,$$

gdzie σ_2 oznacza miarę powierzchniową na M (do sprawdzenia, że M jest rozmaitością), zaś σ_1 miarę na krzywej γ.

Zadanie 2. Połączmy odcinkiem punkt $(\cos\phi, \sin\phi, -1)$ okręgu $\{x^2+y^2 = 1, z = -1\}$ z punktem $\left(\cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), 1\right)$ okręgu $\{x^2+y^2 = 1, z = 1\}$. Zbiór M definiujemy jako sumę wszystkich takich odcinków bez końców. Wykaż, że M jest rozmaitością 2-wymiarową w $\mathbb{R}^3$ i oblicz całkę

$$\int_M |z|\mathrm{d}\sigma_2(z) \ .$$

`Zadania domowe na 31 marca 2020:`

Zadanie 3. Rozważmy suriekcję liniową $L : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ i niech $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ będzie zbiorem mierzalnym. Wykaż że

$$\sqrt{\det(L \cdot L^T)} \cdot \lambda_{n+k}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_k(A \cap L^{-1}(\boldsymbol{y}))\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} \ .$$

Sybmol σ_k oznacza tutaj miarę powierzchniową na zbiorze $L^{-1}(\boldsymbol{y})$. Powyższy wzór jest pewnym uogólnieniem twierdzenia Fubini'ego – przypadek gdy L jest rzutem na pierwsze n współrzędnych.

Nie sprawdzone pozostaje zadanie 3 (konstrukcja przekształcenia afinicznego) i zadanie 4 (miara zbioru wypukłego) z poprzedniej pracy domowej – można je zgłaszać na następnych ćwiczeniach.
Wskazówka (do zadania 4 z poprzedniej pracy domowej) $h^n = \int_0^h \frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t$. Jeśli przypadek ogólny sprawia trudności to wystarczy rozpatrzeć $n = 3$. Stała ω_n prawdopodobnie nie jest poprawna.
