AM II.2 2019/20 (gr. $*$)

3. ćwiczenia zdalne 20 marca 2020
Miara powierzchniowa

Zadanie 1. Rozważmy funkcję gładką $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ i niech Σ będzie powierzchnią 2-wymiarową powstałą przez obrót wykresu funkcji f wokół osi $0X$. Znajdź wzór na pole Σ.

I reguła Pappusa-Guldina. *Dla powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f z poprzedniego zadania jej pole wynosi*

$$\sigma^2(\Sigma) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x = 2\pi l \cdot \langle R \rangle \ ,$$

gdzie $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$ to długość wykresu, zaś $\langle R \rangle = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$ to odległość środka masy wykresu od osi obrotu.

Zadanie 2. Udowodnij regułę Pappusa-Guldina i oblicz na jej podstawie pole powierzchni bocznej torusa o promieniach r i R.

Zadanie 3. Udowodnij, że miara powierzchniowa na sferze S^{n-1} jest niezmiennicza na działanie elementów grupy $O(n)$.

Zadanie 4. Wykaż, że miara powierzchniowa na sferze S^{n-1} jest *izotropowa*, to znaczy dla każdego $\boldsymbol{y} \in S^{n-1}$ zachodzi

$$\int_{S^{n-1}} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 \mathrm{d}\sigma_{n-1}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu(S^{n-1})}{n} \ .$$

`Zadania domowe na 27 marca:`

Zadanie 5. Rozważmy rodzinę wektorów $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Wykaż, że miara $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{\boldsymbol{v}_i}$ jest izotropowa wtedy i tylko wtedy gdy układ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ jest bazą ortonormalną.

Zadanie 6. *Ciałem wypukłym* $K \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy zwarty zbiór wypukły o niepustym wnętrzu. Powiemy, że ciało wypukłe K jest izotropowe gdy $\lambda_n(K) = 1$ (unormowanie), $\int_K \boldsymbol{x}\mathrm{d}^n(\boldsymbol{x}) = 0$ (scentorwanie) oraz dla pewnej stałej dodatniej α i dowolnego $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość

$$\int_K \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 \mathrm{d}^n(\boldsymbol{x}) = \alpha^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 \ .$$

Wykaż, że K jest izotropowe wtedy i tylko wtedy gdy $\int_K \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}^T \mathrm{d}^n(\boldsymbol{x}) = \alpha^2 I_n$.

Zadanie 7. Wykaż, że dla dowolnego ciała wypukłego K istnieje odwracalne przekształcenie afiniczne $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takie, że $T(K)$ jest ciałem wypukłym izotropowym.

Zadanie 8. Niech K będzie ciałem izotropowym i $\boldsymbol{x}_0 \in K$ ustalonym punktem. Określamy odwzorowanie $h : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ wzorem $h(\boldsymbol{u}) = \max\{t > 0 \mid \boldsymbol{x} + t \cdot \boldsymbol{u} \in K\}$. Wykaż, że

$$\lambda_n(K) = \omega_n \int_{S^{n-1}} h(\boldsymbol{u})^n \mathrm{d}\sigma_{n-1}(\boldsymbol{u}) \ ,$$

gdzie $\omega_n = \sigma_{n-1}(S^{n-1})$.

`Zadania dodatkowe:`

Zadanie 9. Znajdź wzór na miarę sfery n-wymiarowej $S_{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$.

Zadanie 10. Wykaż, że istnieje pewna stała $C \in \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość

$$\|\boldsymbol{y}\|_2 = C \int_{S^{n-1}} |\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle| \mathrm{d}\sigma^{n-1}(\boldsymbol{x}) \ .$$

Zadanie 11. Dla odwzorowania $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i miary μ na $\mathbb{R}^n$ definiujemy miarę $T_*\mu$ jako $\mathrm{T}_*\,\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$. Niech teraz μ będzie miarą izotropową, zaś P miarą probabilistyczną na $O(n)$ i zdefiniujmy

$$\mu_P = \int_{O(n)} (T_*\mu) \mathrm{d}P(T) \ ,$$

to znaczy, dla dowolnej funkcji ciągłej f na S^{n-1} mamy

$$\int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\mu_P(\boldsymbol{x}) = \int_{O(n)} \int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}T_*\mu(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}P(T) \ .$$

Wykaż, że μ_P również jest miarą izotropową.

Zadanie 12. Niech K będzie ciałem izotropowym, $r := \lambda_n(B^n(\mathbf{0}, 1))^{-\frac{1}{n}}$. Wykaż, że

$$\alpha^2 \geq \frac{1}{n} \int_{B^n(\mathbf{0},r)} \|\boldsymbol{x}\|^2 \ \mathrm{d}^n(\boldsymbol{x}) \geq c > 0,$$

gdzie c jest stałą niezależną od wymiaru.

Wskazówka: Rozważ zbiory $K \setminus B^n(\mathbf{0}, r)$ oraz $B^n(\mathbf{0}, r) \setminus K$.
