AM II.2 2019/20 (gr. $*$)

2. ćwiczenia zdalne 17 marca 2020
Splot, miara powierzchniowa

Omówienie zadań domowych.

Miara i całka powierzchniowa. *Rozważmy podrozmaitość k-wymiarową $M \subset \mathbb{R}^n$ sparametryzowaną przekształceniem gładkim $\Psi : \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^n$ (tzn. $M = \Psi(U)$). Wówczas k-wymiarowa miara podrozmaitości M to*

$$\sigma^k(M) = \int_U \sqrt{\det\left[\mathrm{d}\Psi^T(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})\right]}\mathrm{d}^k(\boldsymbol{x}) \ .$$

Wielkość $\sqrt{\det\left[\mathrm{d}\Psi^T(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})\right]} = \sqrt{\det\left[\langle \mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})[e_i], \mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})[e_j]\rangle\right]}$ to pierwiastek z wyznacznika Gramma, a więc k-wymiarowa objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\{\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})[e_1], \mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})[e_2], \dots, \mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})[e_k]\}$, gdzie $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ oznacza standardową bazę ortonormalną w $\mathbb{R}^k$. Tak zdefiniowana wielkość $\sigma^k(M)$ nie zależy od wyboru parametryzacji zbioru M (dowód używa twierdzenia o zamianie zmiennej w całce).

Ogólniej możemy określić całkę z funkcji $f : \mathbb{R}^n \supset M \to \mathbb{R}$ na zbiorze M względem miary powierzchniowej σ^k wzorem

$$\int_M f \mathrm{d}\sigma^k = \int_U f(\Psi(\boldsymbol{x})) \cdot \sqrt{\det\left[\mathrm{d}\Psi^T(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})\right]}\mathrm{d}^k(\boldsymbol{x}) \ .$$

Również ta wielkość nie zależy od konkretnego wyboru parametryzacji zbioru M.

Przykład (Długość krzywej parametrycznej.). Rozważmy krzywą gładką $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n$. Wówczas długość tej krzywej to

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot \mathrm{d}\sigma^1 := \int_I \|\mathrm{d}\gamma(t)\|\mathrm{d}t \ ,$$

gdzie $\|\mathrm{d}\gamma(t)\|$ oznacza długość euklidesową różniczki odwzorowania γ w punkcie t. Intuicja jest taka, że wielkość $\|\mathrm{d}\gamma(t)\|$ mówi jak bardzo nasza parametryzacja rozciąga albo skraca standardową miarę na $I \subset \mathbb{R}$.

Zadanie 1. Powierzchnia $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ jest wykresem funkcji gładkiej $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ (tzn. $\Sigma = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} \in U\}$). Wykaż, że

$$\sigma^n(\Sigma) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|^2}\mathrm{d}^n(\boldsymbol{x}) \ .$$

Zadanie 2. Oblicz miarę powierzchniową sfery 2-wymiarowej $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

`Zadania domowe na 20 marca:`

Zadanie 3. Funkcja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest mierzalna i ograniczona. Określamy $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(x) = \int_0^x f(t)f(x-t) \ \mathrm{d}t \ .$$

Czy zawsze $F(x) \geq 0$ na pewnym odcinku $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Zadanie 4. Oblicz miarę powierzchniową torusa $T = \{(x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Zadanie 5. Oblicz miarę powierzchniową torusa $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = \mathbb{R}^2, z^2 + t^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^4$.

`Zadanie pisemne na 27 marca:`

Zadanie 6. Rozważmy rodzinę funkcji

$$K_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) ,$$

i dla funkcji $g \in C_0(\mathbb{R})$ określmy funkcję $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ wzorem $f(t, x) = (g * K_t)(x)$. Wykaż, że:

a) Funkcja f spełnia równanie przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} .$$

b) Funkcja $g(x)$ jest warunkiem początkowym tego równania, tj. $\lim_{t \to 0} f(t, x) = g(x)$.

c) Zachodzi równość

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, t) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathrm{d}x .$$

d) Oblicz granicę punktową $\lim_{t \to +\infty} f(x, t)$.
