AM II.2 2019/20 (gr. $*$)

1. ćwiczenia zdalne 13 marca 2020 – splot i wygładzanie. Rozwiązania

Zadanie 1. (podstawowe własności splotu) Wykaż, że dla dowolnych funkcji całkowalnych $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(a) funkcja $\boldsymbol{y} \mapsto f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ jest całkowalna dla p.w. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, w związku z czym splot $(g * f)(\boldsymbol{x})$ jest dobrze określony dla p.w. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) zachodzi nierówność $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

(c) splot jest przemienny, tj. $f * g = g * f$.

(d) splot jest łączny, tj. $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, która jest oczywiście mierzalną funkcją w $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, z uwagi na to, że miara Lebesgue'a jest produktowa. Jeśli f i g są dodatnie to z tw. Fubini'ego (a w zasadzie z tw. Tonelli'ego) mamy

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}^n\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n\boldsymbol{x} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y}\right] = \int_{\mathbb{R}^{2n}} h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\ \mathrm{d}^{2n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) =$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n\boldsymbol{y} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{x}\right] = \Big|\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\ \mathrm{d}^n\boldsymbol{z} = \mathrm{d}^n\boldsymbol{x}\Big| = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n\boldsymbol{y} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{z})\ \mathrm{d}^n\boldsymbol{z}\right] =$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n\boldsymbol{y} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})\|g\|_1\right] = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < +\infty\ .$$

Udowodniliśmy zatem całkowalność h na $\mathbb{R}^{2n}$, całkowalność $f * g$ na $\mathbb{R}^n$ i jednocześnie oszacowanie (b). Z całkowalności h i tw. Fubini'ego mamy automatycznie (a). Żeby przejść do funkcji dowolnego znaku wystarczy zauważyć, że $|f * g| \leq |f| * |g|$.

Przemienność splotu dowodzimy przez prostą zamianę zmiennych:

$$(f*g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = \Big|\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, \mathrm{d}^n\boldsymbol{z} = \mathrm{d}^n\boldsymbol{y}\Big| = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})g(\boldsymbol{z})\mathrm{d}^n\boldsymbol{z} = (g*f)(\boldsymbol{x})\ .$$

Podobne rozumowanie pozwala udowodnić łączność splotu.

$$f * (g * h)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})(g * h)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{z})h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\mathrm{d}^n\boldsymbol{z}\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} =$$
$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{z})h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\mathrm{d}^{2n}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

i analogicznie

$$(f * g) * h(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(\boldsymbol{w})g(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{w})h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})\mathrm{d}^{2n}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{w})\ .$$

Przejścia pomiędzy tymi dwoma całkami dokonujemy za pomocą zamiany zmiennych $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{t}-\boldsymbol{w}$.

Zadanie 2. Dla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ udowodnij, że splot $(f * g)(\boldsymbol{x})$ jest dobrze określony dla p.w. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ oraz że zachodzi następująca nierówność Younga:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1 \ .$$

Wskazówka: Oszacuj $(f * g)(\boldsymbol{x})$ z nierówności Höldera.

Rozwiązanie: Załóżmy, że f i g są dodatnie, jeśli nie to szacujemy $|f * g| \leq |f| * |g|$. Niech $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mamy

$$f * g(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n \boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) g^{\frac{1}{p}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot g^{\frac{1}{q}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n \boldsymbol{y} \overset{\text{Hölder}}{\leq}$$
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n \boldsymbol{y} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n \boldsymbol{y} \right)^{\frac{1}{q}} = ((f^p * g)(\boldsymbol{x}))^{\frac{1}{p}} \cdot (\|g\|_1)^{\frac{1}{q}} \ .$$

A stąd

$$(f * g)^p(\boldsymbol{x}) \leq (\|g\|_1)^{\frac{p}{q}} \cdot (f^p * g)(\boldsymbol{x}) \ .$$

Wobec wcześniejszego oszacowania $\|(f^p * g)\|_1 \leq \|f^p\|_1 \cdot \|g\|_1$ otrzymujemy

$$\|f * g\|_p^p = \|(f * g)^p\|_1 \leq (\|g\|_1)^{\frac{p}{q}} \cdot \|f^p * g\| \leq (\|g\|_1)^{\frac{p}{q}+1} \cdot \|f^p\|_1 = (\|g\|_1)^p \cdot (\|f\|_p)^p \ . \quad \square$$

Zadanie 3. (regularność splotu) Wykaż, że jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, zaś

(a) funkcja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalna i ograniczona, to splot $f * g$ jest dobrze określony i ograniczony.

(b) funkcja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest w klasie $C_c(\mathbb{R}^n)$, bądź $C_0(\mathbb{R}^n)$ (odpowiednio: funkcje ciągłe o zwartym nośniku i funkcje ciągłe znikające w nieskończoności) to splot $f * g$ jest jednostajnie ciągły.

(c) funkcja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest jest w klasie $C_c^k(\mathbb{R}^n)$, to splot $f * g$ jest klasy $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Rozwiązanie: (a) Załóżmy, że $|g| < M$ wtedy

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n \boldsymbol{y} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{y})| \cdot M \leq M \cdot \|f\|_1 < +\infty \ .$$

(b) Zauważmy, że funkcja $\boldsymbol{x} \mapsto g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ jest jednostajnie ciągła, zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| < \delta$ to $|g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y})| < \varepsilon$. Wobec tego dla takich $\boldsymbol{z}$ i $\boldsymbol{x}$ mamy

$$|f * g(\boldsymbol{x}) - f * g(\boldsymbol{z})| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{y})| \cdot |g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y})| \, \mathrm{d}^n \boldsymbol{y} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\boldsymbol{y})| \varepsilon \ \mathrm{d}^n \boldsymbol{y} = \varepsilon \|f\|_1 \ . \quad \square$$

(c) Wejdźmy z różniczkowaniem pod znak całki:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g)(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial x_i}g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = f*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g\right)(\boldsymbol{x})\ .$$

Trzeba jeszcze sprawdzić, czy założenia tw. o różniczkowaniu pod znakiem całki były spełnione, co łatwo uzasadnić w każdym otoczeniu punktu $\boldsymbol{x}$ w $\mathbb{R}^n$ korzystając ze zwartości nośnika g.

Zadanie 4. (jedynka splotowa) Rozstrzygnij czy istnieje funkcja całkowalna $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnej fukcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zachodzi równość $f * \delta = f$?

Rozwiązanie: Zakładając istnienie takiej funkcji δ mamy

$$\|f\|_1 = \|f*\delta\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|\delta\|_1\ ,$$

Skąd $\|\delta\|_1 \ge 1$.

Załóżmy teraz, że nośnik δ zawiera punkt $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$. Istnieje wówczas kula $B_0 := B(\boldsymbol{x}_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ taka, że $\int_{B_0}\delta(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} \neq 0$. B.s.o. możemy przyjąć, że $r < \|\boldsymbol{x}_0\|$. Mamy wówczas

$$\begin{aligned}0 \neq \int_{B_0}\delta(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n}\chi_{B(\boldsymbol{x}_0,r)}(\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{y})\ \mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n}\chi_{B(\boldsymbol{0},r)}(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{y})\ \mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = \\ (\chi_{B(\boldsymbol{0},r)}*\delta)(\boldsymbol{x}_0) = \chi_{B(\boldsymbol{0},r)}(\boldsymbol{x}_0) = 0 \quad \text{bo } r < \|\boldsymbol{x}_0\|.\end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\operatorname{supp}\delta \subset \{\boldsymbol{0}\}$, co wobec $\|\delta\|_1 \ge 1$ jest niemożliwe w klasie $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 5. (aproksymacja gładka) Niech $\phi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie jedynką aproksymatywną. Wykaż, że

(a) funkcja $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ to $f * \phi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f$ jednostajnie oraz w normie L^1.

(b) funkcja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ to $f * \phi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f$ w normie L^1. *Wskazówka*: Funkcje ciągłe o zwartym nośniku są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Wywnioskuj, że zbiory $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że $\operatorname{supp}\phi_\varepsilon \subset B^n(\boldsymbol{0},\varepsilon)$ oraz, że $\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\varepsilon(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = 1$, co w łatwy sposób wynika z twierdzenia o zamianie zmiennych. Teraz możemy przystąpić do dowodu.
(a) Funkcja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest jednostajnie ciągła, stąd $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})| < \varepsilon$ o ile $\|\boldsymbol{y}\| < \delta$. Teraz

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x}) - (f*\phi_\delta)(\boldsymbol{x})| = &\left|f(\boldsymbol{x})\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} - \int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi_\delta(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y}\right| \le \\ &\int_{\mathbb{R}^n}|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\,\phi_\delta(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = \int_{B(\boldsymbol{0},\delta)}|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\,\phi_\delta(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} \le \\ &\int_{(0,\delta)}\varepsilon\cdot\phi_\delta(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n\boldsymbol{y} = \varepsilon\ .\end{aligned}$$

Z kolei jeśli $\operatorname{supp} f \subset B(\boldsymbol{0},R)$ to $\operatorname{supp} f*\phi_\delta \subset B(\boldsymbol{0},R) + B(\boldsymbol{0},\delta) \subset B(\boldsymbol{0},R+\delta)$. Zatem całkując oszacowanie powyżej mamy

$$\|f - f*\phi_\delta\|_1 \le \int_{B(\boldsymbol{0},R+\delta)}|f(\boldsymbol{x}) - f*\phi_\delta(\boldsymbol{x})|\mathrm{d}^n\boldsymbol{x} \le \varepsilon\int_{B(\boldsymbol{0},R+\delta)}1\ \mathrm{d}^n\boldsymbol{x} = O(\varepsilon)\ ,$$

co dowodzi zbieżności w L^1.

Teraz już łatwo udowodnimy (b). Dla funkcji $f \in L^1$ znajdziemy funkcję $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ taką, że $\|f-g\|_1 \leq \varepsilon$. Z kolei d.d.m. δ mamy z poprzedniego punktu $\|g - g * \phi_\delta\|_1 < \varepsilon$, a ponadto $\|f * \phi_\delta - g * \phi_\delta\|_1 = \|(f-g) * \phi_\delta\|_1 \leq \|f-g\|_1 \cdot \|\phi_\delta\|_1 = \|f-g\|_1 \cdot 1 \leq \varepsilon$. Z nierówności trójkąta

$$\|f - f * \phi_\delta\|_1 \leq \|f-g\|_1 + \|f * \phi_\delta - g * \phi_\delta\|_1 + \|g - g * \phi_\delta\|_1 < 3\varepsilon \ .$$

Ponadto

$$\|f - g * \phi_\varepsilon\|_1 \leq \|f-g\|_1 + \|g - g * \phi_\delta\| < 2\varepsilon \ .$$

Ponieważ $g * \phi_\delta$ jest funkcją gładką o zwartym nośniku, mamy tezę.