18. ćwiczenia zdalne 9 czerwca 2020
Twierdzenie Sarda, miara Haara

Zadanie 1. Rozważmy wielomian $F \in \mathbb{C}[z]$ traktowany jako odwzorowanie $\widetilde{F} : S^2 \to S^2$, gdzie $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Wyznacz stopień odwzorowania $\widetilde{F}$. *Wskazówka*: Oblicz stopień dla $F(z) = z^n$.

Rozwiązanie: Zacznijmy od policzenia stopnia $z \mapsto z^n$. Wartościami regularnymi są, wszystkie elementy $\mathbb{C}$ z wyjątkiem zera. W szczególności możemy wybrać 1 jako wartość regularną. Jej przeciwobraz $F^{-1}(1) = \{\varepsilon^i \mid i = 1, \ldots, n\}$ to zbiór wszystkich pierwiastków z jedynki. Zbadajmy F w pobliżu takiego pierwiastka: $F'(\varepsilon) = n\varepsilon^{n-1}$. Traktując $\mathrm{d}F$ jako odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mamy

$$\mathrm{d}F(\varepsilon)[\boldsymbol{w}] = n\varepsilon^{n-1} \cdot \boldsymbol{w} = n \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\varepsilon^n = a + i\ b$ oraz $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2]$. Jak widać macierz pochodnej ma dodatni wyznacznik, a więc zachowuje orientację. Wynika stąd, że stopień rozważanego wielomianu to $n = \deg F$.

Aby przejść do dowolnego wielomianu $F \in \mathbb{C}[z]$ możemy postępować dwojako. Sposób pierwszy to powtórzyć powyższe rozumowanie dla ogólnego wielomianu, użycie zasadniczego twierdzenia algebry, aby pokazać, że przeciwobraz generycznego punktu składa się z n różnych punktów i zinterpretowanie pochodnej zespolonej jako macierzy w $\mathbb{R}^2$ o dodatnim wyznaczniku.
Sposób drugi to wydzielenie w F wyrazu najwyższego stopnia $F(t) = r \cdot e^{i\phi} \cdot z^n + W_{n-1}(z)$ i rozważenie pary homotopii

$$F_t(z) = r \cdot e^{i\phi} \cdot z^n + t(W_{n-1}(z)) \quad \text{oraz} G_t(z) = r^t \cdot e^{i\phi t} z^n$$

przekształcających dany wielomian zespolony na wielomian z^n. Ponieważ stopień jest niezmiennikiem homotopijnym wnosimy, że $\deg \widetilde{F}$ to stopień F jako wielomianu. Pewnej uwagi wymaga jeszcze kwestia, czy $\widetilde{F_t}$ jest homotopią na całej sferze Riemanna. Dla $|z| < M$ jest to jasne, zaś dla $|z| > M$ wartości wielomianu skupiają się w małym otoczeniu ∞ i też dostaniemy ciągłość w obu zmiennych.

Przy okazji widzieliśmy, że jeśli odwzorowanie $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest różniczkowalne w sensie zespolonym (tj. dla każdego $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}$ istnieje liczba zespolona $F'(z) \in \mathbb{C}$ taka, że dla każdego $h \in \mathbb{C}$ zachodz $F(z+h) = F(z) + F(z) \cdot h + o(|h|)$), to pochodna F rozumianego jako odwzorowanie $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ musi być postaci $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, a zatem spełnione są tak zwane równania Cauchy'ego-Riemann'a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \textit{oraz} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}\ .$$

Wynika z nich szereg bardzo mocnych właściowości funkcji różniczkowalnych w sensie zespolonym. My korzystaliśmy z tego, że taka pochodna w punkcie nieosobliwym zachowuje orientację.

Zadanie 2. Rozważmy wielomiany $F, G \in \mathbb{C}[z]$ i odwzorowania $\widetilde{\left(\frac{1}{G}\right)} : S^2 \to S^2$, oraz $\widetilde{\left(\frac{F}{G}\right)} : S^2 \to S^2$ gdzie $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ i $\frac{1}{0} = \infty$. Wyznacz stopień odwzorowań $\widetilde{\left(\frac{1}{G}\right)}$ i $\widetilde{\left(\frac{F}{G}\right)}$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że odwzorowanie $\widetilde{\left(\frac{1}{G}\right)}$ to złożenie odwzorowania $\widetilde{G} : S^2 \to S^2$ oraz odwzorowania $z \longmapsto \frac{1}{z}$ rozumianego jako automorfizm sfery Riemanna. Ponadto możemy zauważyć, że składaniu przekształceń $f : M \to N$ i $g : N \to S$ odpowiada mnożenie ich stopni – co łatwo widać wprost na poziomie najwyższych kohomologii – $[f(g)]^* = f^*(g^*) : \mathbb{R} = H^n(S) \to H^n(M) = \mathbb{R}$, gdzie $f^* : \mathbb{R} = H^n(N) \to H^n(M) = \mathbb{R}$ to mnożenie przez $\deg f$ oraz $g^* : \mathbb{R} = H^n(S) \to H^n(N) = \mathbb{R}$ to mnożenie przez $\deg g$. Ponieważ przekształcenie $z \mapsto \frac{1}{z}$ ma stopień 1 (jest różniczkowalne w sensie zespolonym i każdy punkt ma dokładnie 1 przeciwobraz), wnioskujemy, że stopień $\widetilde{\left(\frac{1}{G}\right)}$ jest równy stopniowi G jako wielomianu.

Uzupełnić przypadek funkcji wymiernej

Definicja. Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką mającą izolowane punkty krytyczne. Wówczas dla każdego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ i każdego $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$F(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}F_{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{v}] + \mathrm{d}^2 F_{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}] + o(|\boldsymbol{v}\|^2) \ ,$$

gdzie druga pochodna $\mathrm{d}^2 F_{\boldsymbol{x}}$ to forma kwadratowa na przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_{\boldsymbol{x}} \mathbb{R}^n$. Powiemy, że F jest *funkcją Morse'a* gdy w każdym punkcie krytycznym $\boldsymbol{x} \in M$ forma $\mathrm{d}^2 F_{\boldsymbol{x}}$ jest pełnego rzędu. Analogicznie definiujemy funkcję Morse'a $F : M \to \ R$ na rozmaitości M.

Zadanie 3.

Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją gładką mającą izolowane punkty krytyczne. Wykaż, że istnieje $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ takie, że $F_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle$ jest funkcją Morse'a.

Rozwiązanie: Rozważmy odwzorowanie $G : \boldsymbol{x} \longmapsto (\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_{\boldsymbol{x}}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\Big|_{\boldsymbol{x}})$. Zauważmy, że $\boldsymbol{x}$ jest punktem krytycznym F wtedy i tylko wtedy gdy $G(\boldsymbol{x}) = 0$. Co więcej F jest funkcją Morse'a gdy każde zero G jest punktem regularnym (wtedy druga pochodna $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\boldsymbol{x}}\right)$ jest pełnego rzędu. Na mocy tw. Sarda zbiór wartości krytycznych G jest miary zero, wobec czego w dowolnym otoczeniu $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ istnieje wartość regularna $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Wówczas w punktach $\boldsymbol{x} \in G^{-1}(\boldsymbol{a})$ mamy $\nabla f\Big|_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}$ i druga pochodna $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\boldsymbol{x}}\right)$ jest pełnego rzędu. Oznacza to, że funkcja $F(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle$ jest funkcją Morse'a.

Zadanie 4. (Istnienie funkcji Morse'a na rozmaitości zwartej)

Niech $F : M \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką na rozmaitość zwartej mającą tylko izolowane punkty krytyczne. Wykaż, że istnieje funkcja $\widetilde{F}$ dowolnie bliska F w normie supremum, która jest funkcją Morse'a

Rozwiązanie: *Szkic dowodu.* Oznaczmy przez $\boldsymbol{x}_i \in M$ skończony zbiór punktów krytycznych F. Wybierzmy parami rozłączne otoczenia U_i tych punktów na których wprowadźmy lokalne układy współrzędnych wokół $\boldsymbol{x}_i$. Pomysł polega na tym, aby poprawić F w otoczeniach U_i dodając mały wyraz liniowy jak w poprzednim zadaniu. Trzeba zadbać o to, aby wygasić taką poprawkę wewnątrz U_i (na przykład mnożąc przez odpowiednio dorany element podziału jedności) tak aby nie popsuć żądanych własności F – tutaj przydaje się kontrola modułu pochodnej F. Szczegóły zostawiamy do uzupełnienia.

Definicja. Niech G będzie grupą topologiczną lokalnie zwartą. *Miarą Haara* na G nazywamy miarę μ na σ-ciele zbiorów borelowskich o następujących własnościach

a) μ jest *lewo-niezmiennicza*, tj. $\mu(gE) = \mu(E)$ dla $E \in \mathcal{B}(G)$,

b) μ jest *regularna*, a więc dla dowolnego zbioru borelowskiego $E \in \mathcal{B}(G)$ zachodzi równość

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid E \subset U\text{– otwarty}\}\ ,$$

oraz dla dowolnego zbioru otwartego U zachodzi

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid U \supset K\text{– zwarty}\}\ .$$

c) Zbiory zwarte mają skończoną miarę μ

Twierdzenie (Haar, Weil)**.** *Na dowolnej grupie lokalnie zwartej istnieje miara Haara. Co więcej miara ta jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałego czynnika.*

W przypadku grupy macierzowej (ogólniej grupy Lie'go, czyli grupy która jednocześnie ma strukturę gładkiej rozmaitości różniczkowej, taką że działania grupowe $(g,h) \mapsto gh$ i $g \mapsto g^{-1}$ są odwzorowaniami gładkimi, odpowiednio $G \times G \to G$ i $G \to G$) miarę Haara możemy zbudować z bazowych jedno-form lewo niezmienniczych będących składowymi formy $g^{-1}\mathrm{d}g : G \to \mathbb{R}^n$

Zadanie 5. Znaleźć dowolną miarę lewo-niezmienniczą (miarę Haara) na grupach

a) $\mathbb{R}_+$ z mnożeniem.

b) Grupie macierzy postaci $\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, z mnożeniem macierzowym.

c) Grupie $SU(2)$ (macierzy unitarnych wymiaru 2 o wyznaczniku 1).

Rozwiązanie: W pierwszym przypadku szukamy 1-formy postaci $\eta = f(x)\mathrm{d}x$. Ponieważ mnożenie grupowe działa następująco $L_g : y \mapsto gy$, mamy $(L_g)^*\eta|_y = f(gy)d(gy) = g\ f(gy)\mathrm{d}y$. Ta forma jest równa η_y wtedy i tylko wtedy gdy $g\ f(gy) = f(y)$, co łatwo daje $f(y) = \frac{a}{y}$. Ostatecznie miara Haara jest równa $\frac{a}{y}\mathrm{d}y$, gdzie a jest dowolną stałą dodatnią.

W przypadku (b) rozważane macierze są parametryzowane trzema liczbami rzeczywistymi $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Policzmy formę $g^-1\ \mathrm{d}g$, aby znaleźć bazowe 1-formy lewo-niezmiennicze:

$$g^{-1}\mathrm{d}g = \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{d}a & \mathrm{d}b\\ 0 & 1 & \mathrm{d}c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -a & -b+ac\\ 0 & 1 & -c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \mathrm{d}a & \mathrm{d}b\\ 0 & 0 & \mathrm{d}c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \mathrm{d}a & \mathrm{d}b - a\,\mathrm{d}c\\ 0 & 0 & \mathrm{d}c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ .$$

Wynika stąd, że formy $\alpha_1 = \mathrm{d}a$, $\alpha_2 = \mathrm{d}b - a\mathrm{d}c$ i $\alpha_3 = \mathrm{d}c$ stanowią bazę 1-form lewo-niezmienniczych, skąd

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c$$

jest 3-formą lewo-niezmienniczą definiującą miarę Haara.

Grupa $SU(2)$ to macierze unitarne (a więc $A\overline{A}^T = \mathrm{I}_2$) o wyznaczniku równym 1. Łatwo pokazać, że każda taka macierz musi być postaci

$$\begin{pmatrix}x + i\,y & -z + i\,t\\ z + i\,t & x - i\,y\end{pmatrix},\quad \text{gdzie } x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

Jak widać mamy naturalne utożsamienie $SU(2) = S^3$. Wówczas mamy

$$g^{-1}\mathrm{d}g = \begin{pmatrix} x+i\,y & -z+i\,t \\ z+i\,t & x-i\,y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y & -\mathrm{d}z+i\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z+i\,\mathrm{d}t & \mathrm{d}x-i\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-i\,y & z-i\,t \\ -z-i\,t & x+i\,y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y & -\mathrm{d}z+i\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z+i\,\mathrm{d}t & \mathrm{d}x-i\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} i(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}z) & (z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}y) + i\,(x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x + y \\ -(z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}y) + i\,(x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y) & -i(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}z) \end{pmatrix}$$

gdzie opuściliśmy formę $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z + t\,\mathrm{d}t = 0$. Stąd widzimy, że bazą 1-form lewo-niezmienniczych jest $\alpha_1 = x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}z$, $\alpha_2 = z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}y$ i $\alpha_3 = x\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y$. Forma

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 = \ldots = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t[[x,y,z,t],\cdot,\cdot,\cdot]\ ,$$

a więc forma miary powierzchniowej na S^3 jest miarą Haara na $SU(2)$.

Sam wynik można otrzymać szybciej: miara powierzchniowa na S^3 jest niezmiennicza na izometrie, z kolei można pokazać, że działanie $SU(2)$ na sobie to działanie przez izometrie, stąd miara powierzchniowa na S^3 jest niezmiannicza na działanie grupy $SU(2)$, i z jednoznaczności miary Haara mamy tezę.