17. ćwiczenia zdalne 5 czerwca 2020
Twierdzenie Sarda

Zadanie 1. Rozważmy zanurzenie $i : M \subset \mathbb{R}^N$ ustalonej n-wymiarowej rozmaitości M w pewną przestrzeń euklidesową. Przez $\pi_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ rozważmy rzutowanie na przestrzeń prostopadłą do ustalonego wektora $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.
Znajdź warunek na liczbę N, aby istniał wektor $\boldsymbol{a}$ taki by $\pi_{\boldsymbol{a}}(i) : M \to \mathbb{R}^{N-1}$ również było zanurzeniem.

Rozwiązanie: Od zanurzenia żądamy aby było jednocześnie włożeniem i immersją. Zatem aby złożenie $\pi_{\boldsymbol{a}}(i)$ było zanurzeniem murzą być jednocześnie spełnione dwa warunki:

- dla dowolnych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ i $t \in \mathbb{R}$ musimy mieć $\boldsymbol{a} \neq t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$
- dla dowolnego $\boldsymbol{x} \in M$ musi zachodzić warunek $\boldsymbol{a} \notin \mathrm{T}_{\boldsymbol{x}} M$.

Wobec tego rozważmy odwzorowania

$$F : M \times M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N \qquad F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) := \frac{i(\boldsymbol{x}) - i(\boldsymbol{y})}{t} \quad \text{oraz}$$
$$G : \mathrm{T}\, M \longrightarrow \mathbb{R}^N \qquad G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) := i_* \boldsymbol{v}\ .$$

(Poprzez $\mathrm{T}\, M$ oznaczamy tutaj *wiązkę styczną do rozmaitości* M, czyli rozmaitość w której punktami są wszystkie pary $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ takie, że $\boldsymbol{x} \in M$, zaś $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{x}} M$.) Jak widać F i G to gładkie odwzorowania z rozmaitości, odpowiednio, $2n+1$ i $2n$ wymiarowej w $\mathbb{R}^N$ (oznaczamy $n = \dim M$). Na mocy tw. Saarda $\operatorname{im} F$ oraz $\operatorname{im} G$ będą miary zero w $\mathbb{R}^N$ gdy $n > 2n+1$ (tak naprawdę wystarczy nam tutaj wiedza, że dla gładkiego $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ obrazem zbioru miary zero jest zbiór miary zero). Wobec tego przy $N \geq 2N+2$ istnieje $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N \setminus (\operatorname{im} F \cup \operatorname{im} G)$. Wnioskujemy stąd, że jeśli daną rozmaitość wymiaru n można zanurzyć w pewną przestrzeń euklidesową, to można ją też zanurzyć w $\mathbb{R}^{2n+1}$. Z twierdzenia Whitney'a wynika, że można ten wymiar obniżyć dalej do $2n$.

Zadanie 2. Wykaż, że każdą zwartą rozmaitość M możemy zanurzyć w pewną przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^N$. Wskazówka: spróbuj skonstruować zanurzenie dla M mającej atlas składający się z dwóch map.

Rozwiązanie: Jeśli M ma atlas składający się z jednej mapy $\phi : M \to U \subset \mathbb{R}^n$ to ta mapa automatycznie definiuje zanurzenie M w $\mathbb{R}^n$. W przypadku atlasu składającego się z dwóch map: $M = V_1 \cup V_2$, $\phi_1 : V_1 \to U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\phi_2 : V_2 \to U_2 \subset \mathbb{R}^n$, naturalnym pomysłem jest próbować budować zanurzenie postaci $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\phi_1(\boldsymbol{x}), \phi_2(\boldsymbol{x}))$, z którym jest ten problem, że nie jest dobrze określone na granicach obu map. Aby temu zaradzić wystarczy rozważyć rozszerzenie map ϕ_i na całe M z użyciem podziału jedności: $f_1 + f_2 = 1$, a więc $\widetilde{\phi}_1 = \phi_1 \cdot f_1$ oraz $\widetilde{\phi}_2 = \phi_2 \cdot f_2$. Określmy teraz odwzorowanie $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\widetilde{\phi}_1(\boldsymbol{x}), \widetilde{\phi}_2(\boldsymbol{x}))$. Jest ono dobrze określone i gładkie, ale w ogólności nie musi być różnowartościowe (nie ma dobrego sposobu aby jednoznacznie przypisać punkt $\boldsymbol{x}$ jego obrazowi $\phi(\boldsymbol{x})$). Aby temu zaradzić dołóżmy dodatkową informację o użytym podziale jedności:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = (\widetilde{\phi}_1(\boldsymbol{x}), \widetilde{\phi}_2(\boldsymbol{x}), f_1(\boldsymbol{x}))\ ,$$

co pozwala już jednoznacznie odwrócić odwzorowanie.
W ogólnym przypadku M jako rozmaitość zwarta ma skończony atlas $M = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$; $\phi_i : V_i \to U_i \subset \mathbb{R}^n$, a powyższy wzór możemy uogólnić do

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}) \cdot \phi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x}) \cdot \phi_k(\boldsymbol{x}), f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{k-1}(\boldsymbol{x}))\ .$$

Zadanie 3. Rozważmy 2-formę ω na 4-wymiarowej rozmaitości M. Załóżmy dodatkowo, że ωjest zamknięta, oraz niezdegenerowana, w tym sensie, że forma $\omega \wedge \omega$ nigdzie nie znika. (Parę (M, ω) o powyższych własnościach nazywamy *rozmaitością symplektyczną.*) Wykaż, że wokół każdego punktu $\boldsymbol{p} \in M$ istnieją lokalne współrzędne (x_1, x_2, y_1, y_2), w których ω ma postać

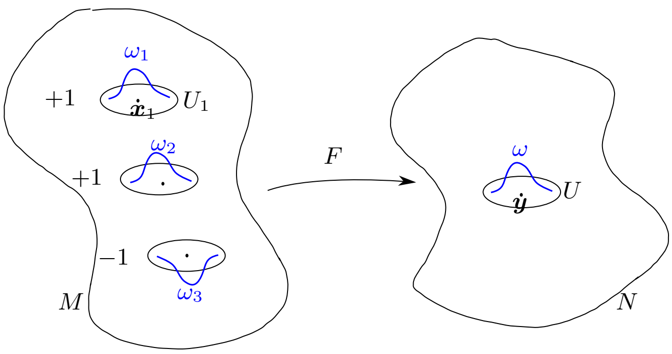
$$\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}y_2 \; .$$

Rozwiązanie: Ponieważ ω jest zamknięta, lokalnie znajdziemy formę θ taką, że $\omega = \mathrm{d}\theta$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$ (zawsze możemy zamienić θ na $\theta + \mathrm{d}f$). Na mocy twierdzenia Darboux w $\mathbb{R}^4$ wiemy, że istnieją lokalne współrzędne (x_1, x_2, y_1, y_2), w których $\theta = x_1 \, \mathrm{d}y_1 + x_2 \, \mathrm{d}y_2$. Po zróżniczkowaniu dostaniemy lokalną postać ω.

Definicja. Rozważmy odwzorowanie gładkie $F : M \to N$ pomiędzy dwoma zwartymi rozmaitościami zorientowanymi bez brzegu tego samego wymiaru $n = \dim M = \dim N$. Indukowane odwzorowanie w n-tych kohomologiach de Rhama

$$F^* : H^n(N) \simeq \mathbb{R} \longrightarrow H^n(M) \simeq \mathbb{R}$$

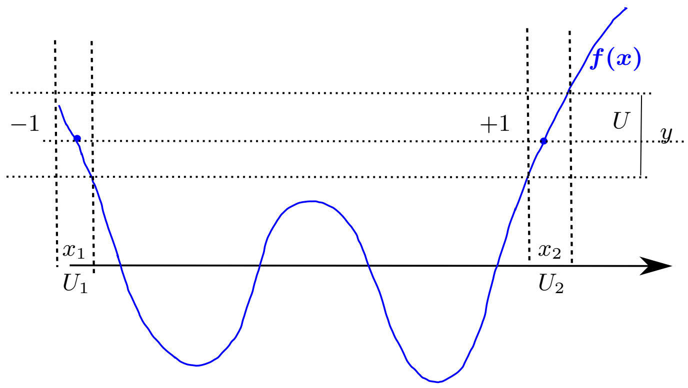
jest odwzorowaniem liniowym, a zatem ma postać $F^* : t \longmapsto c \cdot t$. Liczbę c nazywamy *stopniem przekształcenia* F.



Okazuje się, że stopień musi być liczbą całkowitą, co łatwo wynika z tw. Sarda. Rozważmy mianowicie dowolną wartość regularną $\boldsymbol{y} \in N$. Zbiór $F^{-1}(\boldsymbol{y})$ jest zwartą 0-wymiarową podrozmaitością w M, a więc musi być skończonym zbiorem punktów $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$. Co więcej $\mathrm{d}F_{\boldsymbol{x}_i}$ jest nieosobliwe, a zatem F jest dyfeomorfizmem w otoczeniu każdego z punktów $\boldsymbol{x}_i$. Istnieje zatem otoczenie $\boldsymbol{y} \in U \subset N$ takie, że $F^{-1}(U)$ to suma rozłącznych otoczeń $U_i \ni \boldsymbol{x}_i$. Wybierzmy teraz generator $\omega \in \Omega^n(N)$ grupy $H^n(N)$ o nośniku w U. (Zakładamy, że $\int_N \omega = \int_U \omega = 1$.) Jego obrazem jest suma k-generatorów $\omega_i = (F|_{U_i})^* \omega$ grupy $H^n(M)$, przy czym każdy z generatorów przychodzi ze znakiem plus lub minus (tzn. $\int_M \omega_i = \int_{U_i} \omega_i = \int_{U_i} F^*\omega = \pm \int_U \omega = \pm 1$), zależnie od tego czy $F|_{U_i} : U_i \to U$ zachowuje orientację czy nie. Wniosek: $\deg F = \sum_{sk} \pm 1 = \sum_{sk} \operatorname{sgn}(\det \mathrm{d}F_{\boldsymbol{x}_i})$. Co więcej powyższa procedura pokazuje jak możemy policzyć stopień danego odwzorowania.

Zadanie 4. Rozważmy wielomian $F \in \mathbb{R}[x]$ traktowany jako odwzorowanie $\widetilde{F} : S^1 \to S^1$, gdzie $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wyznacz stopień odwzorowania $\widetilde{F}$.

Rozwiązanie: Zbiór wartości krytycznych dla $\widetilde{F}$ to $\{F(x) \mid F'(x) = 0\}$. Rozważmy dowolną wartość regularną y rozważanego wielomianu i niech $F^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. W istocie jeśli $|y|$ będzie dostatecznie duży, to ten zbiór będzie 1 elementowy dla wielomianów nieparzystego stopnia i 2 albo zero elementowy dla wielomianów parzystego stopnia. W pierwszym przypadku $\deg \widetilde{F} = \pm 1$, a w drugim 0 – zobacz rysunek.



Odp. 0 dla wielomianów parzystego stopnia, ± 1 dla wielomianów nieparzystego stopnia, gdzie znak $\pm$ zależy od współczynnika przy wyrazie dominującym.

`Zadania domowe na 9 czerwca:`

Zadanie 5. Rozważmy wielomian $F \in \mathbb{C}[z]$ traktowany jako odwzorowanie $\widetilde{F} : S^2 \to S^2$, gdzie $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Wyznacz stopień odwzorowania $\widetilde{F}$. *Wskazówka*: Oblicz stopień dla $F(z) = z^n$.

Zadanie 6. Rozważmy wielomian $F \in \mathbb{C}[z]$ i funkcję wymierną $G = \frac{1}{F}$ traktowaną jako odwzorowanie $\widetilde{F} : S^2 \to S^2$, gdzie $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Wyznacz stopień odwzorowania $\widetilde{G}$. *Wskazówka*: Oblicz stopień dla $G(z) = \frac{1}{z^n}$.
