16. ćwiczenia zdalne 29 maja 2020
Twierdzenie Sarda

Korzystając z wyników zadania domowego i zadania o 1-formie w $\mathbb{R}^4$ z ostatnich ćwiczeń możemy wywnioskować, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ spełnia warunki $\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$ oraz $\mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{p}} \wedge \mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$ to wówczas wokół punktu $\boldsymbol{p}$ istnieją lokalne współrzędne (x, y, z, t), w których

$$\theta = x\ \mathrm{d}y + x\ \mathrm{d}t\ .$$

W ogólnym wymiarze zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Darboux)**.** *Rozważmy 1-formę $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ i punkt $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{2n}$. Jeśli $\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$ oraz $(\mathrm{d}\theta)^{\wedge n}\Big|_{\boldsymbol{p}} \neq 0$, to w pewnym otoczeniu $\boldsymbol{p}$ istnieją lokalne współrzędne $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ w których θ ma postać*

$$\theta = \sum_i x_i\ \mathrm{d}y_i\ .$$

Rozważmy 1-formę $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n+1})$ i punkt $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Jeśli $\theta \wedge (\mathrm{d}\theta)^{\wedge n}\Big|_{\boldsymbol{p}} \neq 0$, to w pewnym otoczeniu $\boldsymbol{p}$ istnieją lokalne współrzędne $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z)$ w których θ ma postać

$$\theta = \mathrm{d}z + \sum_i x_i\ \mathrm{d}y_i\ .$$

W drugim przypadku mówimy, że θ jest formą kontaktową.

Twierdzenie (Sarda)**.** *Niech $\Phi : M \to N$ będzie odwzorowaniem gładkim pomiędzy rozmaitościami. Wówczas zbiór wartości krytycznych Φ, a więc*

$$\Phi(C) \subset N \quad \text{gdzie } C = \{\boldsymbol{x} \in M \mid \operatorname{rank}(\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}\Phi) < \dim N\}$$

Jest zbiorem miary Lebesgue'a zero w N.

Zauważmy, że elementy $\Phi(M) \setminus \Phi(C) \subset N$ to wartości regularne Φ, a zatem na mocy twierdzenia o funkcji uwikłanej, jeśli $\boldsymbol{y} \in \Phi(M) \setminus \Phi(C)$ to $\Phi^{-1}(\boldsymbol{y})$ jest podrozmaitością w M wymiaru $\dim M - \dim N$.

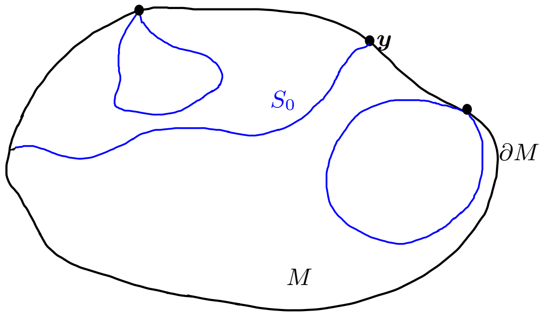
Zadanie 1. Rozważmy zwartą n-wymiarową rozmaitość M z $(n-1)$-wymiarowym brzegiem gładkim ∂M. Wykaż, że nie istnieje gładka retrakcja $R : M \longrightarrow \partial M$, a więc takie odwzorowanie gładkie $R : M \longrightarrow \partial M$, że $R|_{\partial M} = \mathrm{id}_{\partial M}$.

Rozwiązanie: Załóżmy przeciwnie istnienie takiego odwzorowania R i skorzystajmy z tw. Sarda. Ponieważ F jest na ∂M, prawie każdy punkt $\boldsymbol{y} \in \partial M$ jest wartością regularną M. W szczególności przeciwobraz takiego punktu $S := R^{-1}(\boldsymbol{y})$ jest zwartą 1-wymiarową podrozmaitością w M (ewntualnie z brzegiem). Spójrzmy teraz na składową spójną S_0 zawierającą punkt $\boldsymbol{y}$. Topologicznie musi to być odcinek z końcami na brzegu ∂M, albo okrąg zawierający punkt brzegu $\boldsymbol{y}$. Możliwe są 3 sytuacje (patrz rysunek):

- brzeg S_0 to $S_0 \cap \partial M = \{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'\}$, gdzie $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}'$. Ale wówczas z jednej strony $R(\boldsymbol{y}') = \boldsymbol{y}' \neq \boldsymbol{y}$, a z drugiej $\boldsymbol{y}' \in R^{-1}(\boldsymbol{y}) = S$. Sprzeczność.

- Oba końce S_0 łączą się w punkcie $\boldsymbol{y} \in \partial M$ w sposób niegładki. Jest to sprzeczne z gładkością S_0 w otoczeniu $\boldsymbol{y}$ (wynikającą z twierdzenia o submersji).
- Oba końce S_0 łączą się w punkcie $\boldsymbol{y}$ w sposób gładki. Wówczas S_0 jest styczne do ∂M w punkcie $\boldsymbol{y}$, a zatem $\mathrm{T}_{\boldsymbol{y}} S_0 \subset \mathrm{T}_{\boldsymbol{y}} \partial M$. Zauważmy ponadto, że skoro $R(S_0) = \boldsymbol{y}$, to $\mathrm{d}R_{\boldsymbol{y}}\big|_{\mathrm{T}_{\boldsymbol{y}} S_0} = 0$. Ale stąd wynika, że $\mathrm{d}R_{\boldsymbol{y}}\big|_{\mathrm{T}_{\boldsymbol{y}} \partial M}$ nie jest identycznością, wbrew założeniu o postaci $R\big|_{\partial M}$.

Za każdym razem dochodzimy do sprzeczności, co przeczy istnieniu postulowanej retrakcji.



Jako szczególny przypadek dostajemy gładką wersję tw. Brouwera: nie istnieje gładka retrakcja B^n na S^{n-1}; równoważnie każdy gładki automorfizm B^n ma punkt stały. Istotnie, gdyby $F : B^n \to B^n$ był gładkim automorfizmem bez punktu stałego, to odwzorowanie

$$B^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \text{punkt przecięcia promienia } \overrightarrow{F(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}} \text{ z brzegiem } \partial B^n.$$

jest gładką retrakcją $B^n \longrightarrow S^{n-1}$.

`Zadania domowe na 5 czerwca:`

Zadanie 2. Rozważmy zanurzenie $i : M \subset \mathbb{R}^N$ ustalonej n-wymiarowej rozmaitości M w pewną przestrzeń euklidesową. Przez $\pi_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ rozważmy rzutowanie na przestrzeń prostopadłą do ustalonego wektora $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.
Znajdź warunek na liczbę N, aby istniał wektor $\boldsymbol{a}$ taki by $\pi_{\boldsymbol{a}}(i) : M \to \mathbb{R}^{N-1}$ również było zanurzeniem.

Zadanie 3. Wykaż, że każdą zwartą rozmaitość M możemy zanurzyć w pewną przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^N$. Wskazówka: spróbuj skonstruować zanurzenie dla M mającej atlas składający się z dwóch map.

Zadanie 4. Rozważmy 2-formę ω na 4-wymiarowej rozmaitości M. Załóżmy dodatkowo, że ωjest zamknięta, oraz niezdegenerowana, w tym sensie, że forma $\omega \wedge \omega$ nigdzie nie znika. (Parę (M, ω) o powyższych własnościach nazywamy *rozmaitością symplektyczną*.) Wykaż, że wokół każdego punktu $\boldsymbol{p} \in M$ istnieją lokalne współrzędne (x_1, x_2, y_1, y_2), w których ω ma postać

$$\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}y_2 \ .$$
