15. ćwiczenia zdalne 26 maja 2020
Twierdzenie Darboux – klasyfikacja 1-form w $\mathbb{R}^n$

Uzupełnienie *(do konstrukcji gładkiego rozkładu jedności na rozmaitościach) Standardowa definicja rozmaitości zakłada, że jest to* przestrzeń topologiczna Hausdorffa *spełniająca* drugi aksjomat przeliczalności.

Zadanie 1. Rozważmy 1-formę $\theta = \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x$ w $\mathbb{R}^3$ i niech M będzie jednowymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^3$ taką że $\theta|_M = 0$. Załóżmy ponadto, że w punkcie $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ płaszczyzna $\{x = x_0\}$ jest transwersalna do przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} M$. Wykaż, że w pewnym otoczeniu $U \ni \boldsymbol{p}_0$ rozmaitość M ma postać $M \cap U = \{(x, f'(x), f(x))\}$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Rozwiązanie: Z założenia o transwersalności w pewnym otoczeniu $U \ni \boldsymbol{p}_0$ możemy wyznaczyć y i z na M jako funkcje zmiennej x, a więc istnieje parametryzacja

$$\gamma : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \ni x \longmapsto (x, g(x), f(x))$$

zbioru $M \cap U$. Zauważmy, że $0 = \theta|_M = i^*\theta$, gdzie $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ jest włożeniem M w $\mathbb{R}^3$. Wobec tego

$$0 = \gamma^* i^* \theta = \mathrm{d}(f(x)) - g(x)\mathrm{d}x = \left[f'(x) - g(x)\right] \mathrm{d}x \ ,$$

skąd $g(x) = f'(x)$, a zatem

$$M \cap U = \{(x, f'(x), f(x)) \mid x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\} \ .$$

Komentarz: Załóżmy, że chcemy rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne $z'(x) = F(x, z)$. Rozważmy teraz powierzchnię $S_F = \{(x, y = F(x, z), z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$. Niech $M \subset S_F$ będzie dowolną 1-wymiarową podrozmaitością całkową formy $\theta = \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x$. Wówczas z jednej strony, z wyników zadania przy założeniu o transwersalności dla pewnej funkcji f mamy $M = \{(x, f'(x), f(x))\}$, a z drugiej $y = f'(x) = F(x, f(x))$, ponieważ $M \subset S_F$.

Aby rozwiązać równanie $z'(x) = F(x, z)$ szukamy zatem krzywych stycznych jednocześnie do S_F oraz do $\ker\theta$:

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} M \subset \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} S_F \cap \ker\theta_{\boldsymbol{p}_0} \ .$$

Po prawej stronie mamy przecięcie dwóch 2-wymiarowych płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$, co w generycznym przypadku jest przestrzenią jedno-wymiarową. Dostajemy zatem rodzinę takich jednowymiarowych przestrzeni, a rozwiązanie równania to rozmaitość całkowa takiej rodziny (która zawsze istnieje – twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności równań różniczkowych zwyczajnych). Tak wygląda z grubsza geometria stojąca za rozwiązywaniem równań różniczkowych zwyczajnych. Pozostają jeszcze do zbadania ciekawe punkty, w których $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} S_F = \ker\theta_{\boldsymbol{p}_0}$. Podobne podejście można zastosować również do równań różniczkowych cząstkowych...

Zadanie 2. Rozważmy 1-formę $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ taką, że $\theta(\boldsymbol{p}) \neq 0$. Wykaż, że jeśli $\mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{p}} \wedge \mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$, to w otoczeniu punktu $\boldsymbol{p}$ istnieje gładkie nieznikające pole wektorowe $\boldsymbol{V}$ spełniające równanie

$$\mathrm{d}\theta(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{V}, \cdot] = \theta(\boldsymbol{x})[\cdot] \ .$$

Zbadaj jak wygląda forma θ we współrzędnych (y_1, y_2, y_3, y_4), w których $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_{y_4}$.

Rozwiązanie: Przyjmijmy w $\mathbb{R}^4$ współrzędne (x_1, x_2, x_3, x_4) i załóżmy, że forma θ ma w tych współrzędnych postać $\theta = X_1\, \mathrm{d}x_1 + X_2\, \mathrm{d}x_2 + X_3\, \mathrm{d}x_3 + X_4\, \mathrm{d}x_4$, gdzie X_i to funkcje zmiennych (x_1, x_2, x_3, x_4).

Równanie $\mathrm{d}\theta[\boldsymbol{V},\cdot] = \theta[\cdot]$ na pole $\boldsymbol{V} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ prowadzi do równania

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & \dots & \\ \dots & & & \\ a_{41} & \dots & & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} ,$$

gdzie $a_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ jest macierzą antysymetryczną. Jeśli rząd tej macierzy wynosi 4 w otoczeniu $\boldsymbol{p}$ (co mam miejsce gdy $\mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{p}} \wedge \mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$), to znajdziemy rozwiązanie odwracając macierz (a_{ij}).

Wprowadźmy teraz współrzędne (y_1, y_2, y_3, y_4), w których $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_{y_4}$. Zauważmy, że $\theta[\boldsymbol{V}] = \mathrm{d}\theta[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}] = 0$, skąd wnioskujemy, że w nowych współrzędnych $\theta[\boldsymbol{e}_{y_4}] = 0$, skąd θ ma postać

$$\theta = Y_1 \ \mathrm{d}y_1 + Y_2 \ \mathrm{d}y_2 + Y_3 \ \mathrm{d}y_3 \ ,$$

gdzie Y_i są funkcjami zmiennych (y_1, y_2, y_3, y_4). Ponadto równie $\mathrm{d}\theta[\boldsymbol{V},\cdot] = \theta[\cdot]$ zapisane w nowych zmiennych prowadzi do układu równań zwyczajnych

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_4} = Y_1 \qquad \frac{\partial Y_2}{\partial y_4} = Y_2 \qquad \frac{\partial Y_3}{\partial y_4} = Y_3 \ ,$$

który łatwo rozwiązać:

$$Y_1 = \exp{(y_4)} \cdot \widetilde{Y}_1(y_1, y_2, y_3) \qquad Y_2 = \exp{(y_4)} \cdot \widetilde{Y}_2(y_1, y_2, y_3) \qquad Y_3 = \exp{(y_4)} \cdot \widetilde{Y}_3(y_1, y_2, y_3) \ .$$

Stąd wnioskujemy, że

$$\theta = \exp{(y_4)} \cdot \theta' \quad \text{gdzie } \theta' \in \Omega^1(\mathbb{R}^3),\ \mathbb{R}^3 \ni (y_1, y_2, y_3).$$

Zadanie 3. Rozważmy 1-formę $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ taką, że $\theta(\boldsymbol{p}) \neq 0$. Wykaż że w otoczeniu punktu $\boldsymbol{p}$ istnieje gładkie pole wektorowe $\boldsymbol{V}$ spełniające równanie

$$\mathrm{d}\theta(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{V},\cdot] = 0 \ .$$

Zbadaj jak wygląda forma θ we współrzędnych (y_1, y_2, y_3), w których $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_{y_3}$.
Rozwiązanie: Przyjmijmy w $\mathbb{R}^3$ współrzędne (x_1, x_2, x_3) i załóżmy, że forma θ ma w tych współrzędnych postać $\theta = X_1 \ \mathrm{d}x_1 + X_2 \ \mathrm{d}x_2 + X_3 \ \mathrm{d}x_3$, gdzie X_i to funkcje zmiennych (x_1, x_2, x_3). Równanie $\mathrm{d}\theta[\boldsymbol{V},\cdot] = 0$ na pole $\boldsymbol{V} = [v_1, v_2, v_3]$ prowadzi do równania

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

gdzie $a_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ jest macierzą antysymetryczną. Rząd tej macierzy wynosi co najwyżej 2 i jest równy 2 gdy $\mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$. W otoczeniu $\boldsymbol{p}$ znajdziemy zatem rozwiązanie (w przypadku rzędu równego 2 dane z dokładnością do skalowania, w przeciwnym razie rodzina rozwiązań będzie jeszcze bogatsza).

Wprowadźmy teraz współrzędne (y_1, y_2, y_3), w których $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_{y_3}$. Forma θ w tych współrzędnych ma postać

$$\theta = Y_1 \ \mathrm{d}y_1 + Y_2 \ \mathrm{d}y_2 + Y_3 \ \mathrm{d}y_3 \ ,$$

gdzie Y_i są funkcjami zmiennych (y_1, y_2, y_3). Ponadto równie $\mathrm{d}\theta[\boldsymbol{V},\cdot] = 0$ zapisane w nowych zmiennych prowadzi do układu równań cząstkowych

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_3} = \frac{\partial Y_3}{\partial y_1} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial Y_2}{\partial y_3} = \frac{\partial Y_3}{\partial y^2} \ ,$$

który na następujące rozwiązanie ogólne

$$Y_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + \widetilde{Y}_1(y_1, y_2) \qquad Y_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} + \widetilde{Y}_2(y_1, y_2) \qquad Y_3 = \frac{\partial \Psi}{\partial y_3}\ .$$

Stąd wnioskujemy, że

$$\theta = \mathrm{d}\Psi(y_1, y_2, y_3) + \theta' \quad \text{gdzie } \theta' \in \Omega^1(\mathbb{R}^2),\ \mathbb{R}^2 \ni (y_1, y_2).$$

Jako wniosek z powyższego zadania możemy sformułować następujące

Twierdzenie (Darboux w $\mathbb{R}^3$)**.** *Rozważmy 1-formę $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ taką, że $\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$ wówczas:*

a) jeśli $\theta_{\boldsymbol{p}} \wedge \mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$ to istnieją lokalne współrzędne (x, y, z) w otoczeniu $\boldsymbol{p}$ w których $\theta = \mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}x$.

b) jeśli $\mathrm{d}\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$, ale $\theta \wedge \mathrm{d}\theta = 0$ w otoczeniu $\boldsymbol{p}$ wówczas istnieją lokalne współrzędne (x, y, z) w otoczeniu $\boldsymbol{p}$ takie, że $\theta = y\ \mathrm{d}x$.

c) jeśli $\mathrm{d}\theta = 0$ w otoczeniu p, wówczas istnieją lokalne współrzędne (x, y, z) w otoczeniu $\boldsymbol{p}$ w których $\theta = \mathrm{d}x$.

Dowód. Na mocy wyników poprzedniego zadania przy założeniu, że $\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$ możemy sprowadzić 1-formę do postaci $\theta = \mathrm{d}\Phi(y_1, y_2, y_3) + \theta'(y_1, y_2)$. Teraz $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta'$ i na mocy zadania o czynniku całkującym w $\mathbb{R}^2$, jeśli $\mathrm{d}\theta'_{\boldsymbol{p}} \neq 0$ to po odpowiedniej zamianie zmiennych $\theta' = y\ \mathrm{d}x$. Jeśli w punkcie $\boldsymbol{p}$ mamy $0 \neq \theta \wedge \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\Psi \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, to przyjmując $z = \Phi$ mamy punkt *a*). Jeśli w otoczeniu $\boldsymbol{p}$ zachodzi $\theta \wedge \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\Psi \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$ oznacza to, że Ψ zależy tylko od zmiennych (x, y), a więc $\theta = \theta(x, y)$ i na mocy zadania o czynniku całkującym w $\mathbb{R}^2$ mamy punkt *b*). Punkt *c*) wynika wprost z Lematu Poincaré'go. $\square$

`Zadania domowe na 29 maja:`

Zadanie 4. Rozważmy 2-formę $\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \in \Omega^2(\mathbb{R}^n)$; $\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Zakładamy, że macierz $A(\boldsymbol{x}) = (a_{ij}(\boldsymbol{x}))$ jest antysymetryczna. Wykaż, że rząd $A(\boldsymbol{x})$ jest większy równy 4 wtedy i tylko wtedy gdy $\omega \wedge \omega(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Zadanie 5. Rozważmy 1-formę $\theta = f\ \mathrm{d}x + g\ \mathrm{d}y + h\ \mathrm{d}z \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, gdzie $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Formie θ możemy jednoznacznie przypisać pole wektorowe $\boldsymbol{V}_\theta = [f, g, h]$. Zauważmy też, że jeśli $\theta_{\boldsymbol{p}} \neq 0$ to $\boldsymbol{V}_\theta$ nie znika w otoczeniu $\boldsymbol{p}$.

Z kolei dwa nieznikające pola wektorowe są lokalnie równoważne przez dyfeomorfizm – w pewnych lokalnych współrzędnych (y_1, y_2, y_3) nieznikające pole wektorowe ma postać $\boldsymbol{e}_{y_3}$. Wynikałoby stąd, że każde dwie 1-formy w $\mathbb{R}^3$ są równoważne przez dyfeomorfizm (zamieniamy formy na pola, przekształcamy pola na siebie i wracamy z pól do form). Tymczasem wiemy, że na przykład formy $\theta = \mathrm{d}z + y\mathrm{d}x$ i $\theta' = \mathrm{d}x$ nie są lokalnie równoważne (rozróżnia je niezmiennik $\theta \wedge \mathrm{d}\theta$). Gdzie jest zatem błąd w rozumowaniu?
