14. ćwiczenia zdalne 22 maja 2020
Twierdzenie Darboux (kanoniczna postać lokalna 1-formy w $\mathbb{R}^n$)

Zadanie 1. Rozważmy n-wymiarową rozmaitość różniczkową M i n-formę $\omega \in \Omega^n(M)$, która nigdzie nie znika (tzn. dla każdego $p \in M$ istnieją wektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathrm{T}_p M$ takie, że $\omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \neq 0$). Wykaż, że M jest orientowalna. Czy prawdziwa jest implikacja przeciwna?

Rozwiązanie: Mając daną taką n-formę ω możemy przyjąć, że układ bazowy $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ w przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M$ jest dodatnio zorientowany wtedy i tylko wtedy gdy $\omega(\boldsymbol{p})[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] > 0$. Używając tego narzędzia możemy zorientować dowolny atlas naszej rozmaitości. Mianowicie, jeśli $\phi : M \supset U \to V \subset \mathbb{R}^n$ jest mapą, zaś $\mathbb{R}^n$ ma standardową orientację $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, to powiemy, że ta orientacja jest zgodna z orientacją M, gdy układ $\{\mathrm{d}\phi^{-1}[\boldsymbol{e}_1], \ldots, \mathrm{d}\phi^{-1}[\boldsymbol{e}_n]\}$ jest dodatnio zorientowany.

W drugą stronę: ustalmy orientację rozmaitości M. Pokryjmy M rodziną map $U_\alpha \simeq \mathbb{R}^n$, gdzie $A \ni \alpha$ jest zbiorem indeksów, i niech $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ będzie lokalnie skończonym podziałem jedności wpisanym w rozważane pokrycie. Na każdym elemencie pokrycia wybierzmy pewną nigdzie nieznikającą n-formę ω_α, taką że $\omega_\alpha(p)[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n] > 0$ na dodatnio-zorientowanym układzie bazowym $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_p M$, $p \in U_\alpha$. Taki wybór jest możliwy, gdyż $U_\alpha \simeq \mathbb{R}^n$, skąd możemy przepchnąć(cofnąć) jedną z dwóch kanonicznych form orientacji vol lub $-$vol. Wreszcie forma

$$\omega = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha \cdot \omega_\alpha$$

jest dobrze określona (bo suma jest lokalnie skończona) i jest dodatnia na dodatnio-zorientowanych układach bazowych, bo $f_\alpha \geq 0$ i co najmniej jeden z nich jest dodatni w danym punkcie $\boldsymbol{p} \in M$.

Zadanie 2. Czy każda 1-forma $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ma czynnik całkujący? Tzn. czy istnieje niezerowa funkcja gładka $F : \mathbb{R}^3 \supset U \to \mathbb{R}$ taka, że $F \cdot \theta$ jest dokładna w pewnym otoczeniu wybranego punktu $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$?

Rozwiązanie: Nie. Zauważmy, że jeśli taka funkcja istnieje, to dla pewnej funkcji $G \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ zachodzi $F\theta = \mathrm{d}G$. Wówczas $\theta = \frac{1}{F}\,\mathrm{d}G$, skąd $\theta \wedge \mathrm{d}\theta = 0$. Tymczasem na przykład dla formy $\theta = \mathrm{d}z + x\mathrm{d}y$ mamy $\theta \wedge \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \neq 0$.

Zadanie 3. Rozważmy jedno-formę $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ spełniająca w wybranym punkcie $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ warunki $\theta(\boldsymbol{p}) \neq 0$ oraz $\mathrm{d}\theta(\boldsymbol{p}) = 0$. Wykorzystując istnienie czynnika całkującego wykaż, że w pewnym układzie współrzędnych (x, y) wokół $\boldsymbol{p}$ mamy

$$\theta = x \; \mathrm{d}y.$$

Zadanie 4. *Jądrem 1-formy* $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ nazywamy rodzinę podprzestrzeni liniowych (*dystrybucję*)

$$\ker \alpha_{\boldsymbol{p}} := \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} \mathbb{R}^n \mid \theta(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}] = 0\} \subset \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} \mathbb{R}^n.$$

Rozmaitością całkową 1-formy α nazwiemy podrozmaitość $S \subset \mathbb{R}^n$ taką, że dla każdego $\boldsymbol{p} \in S$ mamy $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} S \subset \ker \alpha_{\boldsymbol{p}}$.

Oblicz jądra form $\omega = x \, \mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ oraz $\theta = \mathrm{d}z + x \, \mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Rozstrzygnij czy w każdym z tych przypadków istnieje 2-wymiarowa rozmaitość całkowa $S \subset \mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie: Policzenie jąder nie stanowi trudności:

$$\ker \omega_{(x,y,z)} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\} \quad \text{oraz} \quad \ker \theta_{(x,y,z)} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y - x\boldsymbol{e}_z\} \ .$$

Łatwo zauważyć, że płaszczyzny $\{y = \mathrm{const}\}$ tworzą 2-wymiarowe rozmaitości całkowe pierwszej z form.

Załóżmy teraz, że $i : S \subset \mathbb{R}^3$ jest 2-wymiarową podrozmaitością całkową formy θ. Zauważmy, że $\theta|_S = i^*\theta = 0$. Wobec tego $\mathrm{d}\theta|_S = i^*(\mathrm{d}\theta) = \mathrm{d}(i^*\theta) = 0$. Tymczasem $\mathrm{d}\theta[\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y - x\boldsymbol{e}_z] = 1 \neq 0$. Sprzeczność.

W powyższym zadaniu dotykamy dość ciekawego zjawiska: nie każda gładka rodzina 2-wymiarowych płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$ jest rodziną przestrzeni stycznych do pewnej rodziny 2-wymiarowych podrozmaitości (w innym języku: nie każda 2-wymiarowa dystrybucja w $\mathbb{R}^3$ jest całkowalna). Tymczasem każda 1-wymiarowa dystrybucja (w $\mathbb{R}^n$ i ogólniej na dowolnej rozmaitości) zawsze pochodzi od pewnej rodziny jedno-wymiarowych podrozmaitości – znajdowanie takich podrozmaitości to z grubsza rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych! Jak można się spodziewać znajdowanie podrozmaitości całkowych dystrybucji rzędów większego niż 1 jest związane z rozwiązywaniem równań różniczkowych cząstkowych.

Zainteresowanym takimi zjawiskami polecam poszukać haseł: całkowalność dystrybucji*,* twierdzenie Frobeniusa*,* forma kontaktowa*,* dystrybucja Cartana.

`Zadania domowe na 26 maja:`

Zadanie 5. (badawcze) Dla 1-form $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ oraz $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ zbadaj czy (i ewentualnie przy jakich dodatkowych założeniach) któreś z równań

$$\mathrm{d}\theta(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{V}, \cdot] = \theta(\boldsymbol{x})[\cdot] \qquad \text{lub} \qquad \mathrm{d}\theta(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{V}, \cdot] = 0$$

wyznacza jednoznacznie (jednoznacznie z dokładnością do skalowania) pewne pole wektorowe $\boldsymbol{V}$ w otoczeniu danego punktu $\boldsymbol{p}$ (odpowiednio w $\mathbb{R}^3$ lub w $\mathbb{R}^4$).

Jeśli takie pole istnieje, to co można powiedzieć o formie θ wyrażonej we współrzędnych (y_i), w których $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_{y_1}$?

Zadanie 6. Rozważmy 1-formę $\theta = \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x$ w $\mathbb{R}^3$ i niech M będzie jednowymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^3$ taką że $\theta|_M = 0$. Załóżmy ponadto, że w punkcie $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ płaszczyzna $\{x = x_0\}$ jest transwersalna do przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} M$. Wykaż, że w pewnym otoczeniu $U \ni \boldsymbol{p}_0$ rozmaitość M ma postać $M \cap U = \{(x, f'(x), f(x))\}$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
