13. ćwiczenia zdalne 15 maja 2020
Gładki rozkład jedności, orientacja, prostowanie pola wektorowego

Zadanie 1. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Wykaż, że istnieje wstępujący ciąg zbiorów otwartych $V_n \subset U$ o następujących własnościach:

a) domknięcie $\overline{V_n} \subset U$ jest zbiorem zwartym,

b) $\overline{V_n} \subset V_{n+1}$,

c) $\bigcup_n V_n = U$.

Innymi słowy, umiemy przestawić U jako sumę rosnącego ciągu zbiorów „zwarto-otwartych”.
Rozwiązanie: Będziemy korzystali z dwóch podstawowych własności zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$:

- Zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ jest *lokalnie zwarty*, tj. dla każdego $\boldsymbol{x} \in U$ istnieje względnie zwarte otoczenie $V \ni \boldsymbol{x}$ takie, że domknięcie $\overline{V} \subset U$ jest zbiorem zwartym.
- Zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ jest *sigma-zwarty*, tzn. możemy przedstawić U jak przeliczalną sumę zbiorów zwartych $U = \bigcup K_n$.

Zbudujemy teraz indukcyjnie ciąg V_n tak aby $K_n \subset V_n$.

Początek indukcji: weźmy zbiór K_1 i dowolne jego pokrycie zbiorami względnie zwartymi $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ z tego pokrycia możemy wybrać podpokrycie skończone $\{W_i\}_{i \in I}$. Zdefiniujmy teraz $V_1 = \bigcup_{i \in I} W_i$. Łatwo sprawdzić, że V_1 jest zbiorem otwartym, względnie zwartym w U i zawierającym K_1.

Krok indukcyjny: Rozważmy zbiór zwarty $\overline{V_n} \cup K_n$. Analogicznie jak poprzednio możemy ten zbiór pokryć skończoną rodziną zbiorów otwartych $\{W_j\}_{j \in J}$ względnie zwartych w U i definiujemy $V_{n+1} = \bigcup_{j \in J} W_j$. Oczywiście V_{n+1} jest względnie zwarty w U, zawiera $\overline{V_n}$ oraz K_n.

Ponieważ $U = \bigcup K_n \subset \bigcup V_n \subset U$, mamy tezę.

Zadanie 2. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, zaś $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jego pokryciem otwartym. Wykaż, że w pokrycie $\{U_\alpha\}$ da się wpisać podpokrycie lokalnie skończone składające się z kul otwartych. Wykaż, że w pokrycie $\{U_\alpha\}$ można wpisać gładki rozkład jedności.

Rozwiązanie: Rozważmy zbiór „aproksymację zwarto-otwartą” V_n jak w poprzednim zadaniu i określmy $K_n := \overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ – jest to zbiór zwarty jako domknięty podzbiór zbioru zwartego $\overline{V_{n+1}}$. Rozważmy teraz przecięcie pokrycia $\{U_\alpha\}$ ze zbiorem otwartym $V_{n+2} \setminus \overline{V_{n-1}}$. W takie obcięte pokrycie można wpisać pokrycie zbioru K_n kulami otwartymi, a następnie wybrać z niego skończone podpokrycie $\{B_i\}_{i \in I_n}$. Taką konstrukcję powtarzamy dla każdego n. W rezultacie otrzymujemy przeliczalne pokrycie $\{B_j\}_{j \in J}$ zbioru $U = \bigcup K_n$ kulami. Zauważmy, że punkt $\boldsymbol{x} \in K_n$ może być pokryty jedynie skończoną liczbą takich kul, które pochodzą do pokryć zbioru K_n oraz sąsiednich zbiorów K_{n-1} i K_{n+1}. Ostatecznie mamy zatem do czynienia z podpokryciem lokalnie skończonym.

Na koniec z kulami B_j możemy związać funkcje gładkie $f_j : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ o tej własności, że $B_j = \{\boldsymbol{x} \mid f_j(\boldsymbol{x}) > 0\}$. Po unormowaniu, funkcje $\phi_j(\boldsymbol{x}) = \frac{f_j \boldsymbol{x})}{\sum_j f_j(\boldsymbol{x})}$ tworzą gładki podział jedności wpisany w wyjściowe pokrycie $\{U_\alpha\}$.

Zadanie 3. Rozważmy rozmaitość różniczkową M. Załóżmy, że M jest przestrzenią sigma-zwartą i niech $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ będzie dowolnym pokryciem otwartym M. Wykaż, że istnieje gładki rozkład jedności wpisany w pokrycie $\{U_\alpha\}$.

Definicja. Powiemy, że dwie bazy $\{e_1, \ldots, e_k\}$ oraz $\{f_1, \ldots, f_k\}$ zadają tę samą *orientację* przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^k$, gdy wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni. Każda przestrzeń wektorowa ma zatem dwie kanoniczne orientacje.
Orientacją rozmaitości różniczkowej, nazywamy lokalnie zgodny wybór orientacji jej wszystkich przestrzeni stycznych. Intuicyjnie rozumiemy, że wybrane orientacje zmieniają się w sposób ciągły od punktu do punktu. Formalna definicja wymaga wprowadzenia pojęcia atlasu zorientowanego. Nie wszystkie rozmaitości da się zorientować (np. wstęga Moebiusa). Te które dopuszczają orientację nazywamy *orientowalnymi.*

Orientacja przestrzeni wektorowej a formy różniczkowe.
Rozważmy zorientowaną bazę $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ *przestrzeni liniowej* $\mathbb{R}^n$. *Zauważmy, że dla formy* $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ *mamy*

$$\omega[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} = \textit{wyznacznik macierzy przejścia pomiędzy bazą } \{\boldsymbol{v}_i\} \textit{ a bazą standardową } \{\boldsymbol{e}_i\}.$$

Wobec tego wielkość $\operatorname{sgn}(\omega[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n])$ *jest wskaźnikiem tego, czy dana baza* $\mathbb{R}^n$ *jest zorientowana dodatnio, czy ujemnie.*

Twierdzenie. *Niech* X *będzie gładkim polem wektorowym w* $\mathbb{R}^n$, *a* $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ *takim punktem, że* $X(\boldsymbol{p}) \neq \mathbf{0}$. *Wykaż, że w pewnym otoczeniu* $U \ni \boldsymbol{p}$ *można wprowadzić układ współrzędnych* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *w którym pole* X *przyjmuje postać* $X = [1, 0, 0, \ldots, 0]$. *(W innym języku: istnieje lokalny dyfeomorfizm* $\Phi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ *taki, że* $\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{x})[X] = [1, 0, \ldots, 0]$.*)*

Szkic dowodu: *Rozważmy dowolną gładką podrozmaitość* $S \subset \mathbb{R}^n$ *kowymiaru 1, zawierającą punkt* $\boldsymbol{p}$ *i transwersalną do pola* X *w tym punkcie. Wprowadźmy lokalną parametryzację* $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \supset U \to S$ *otoczenia* $\mathbf{0}$ *w* $\mathbb{R}^{n-1}$ *na pewne otoczeniu punktu* $\boldsymbol{p}$ *w* S, *tak aby* $\phi(\mathbf{0}) = \boldsymbol{p}$. *Na mocy twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i gładkiej zależności rozwiązania od warunku początkowego (jakaś wersja tw. Picarda), równanie zwyczajne*

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = X(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(0) = \phi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \end{cases}$$

ma rozwiązanie

$$\Phi : (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, t) \longmapsto \boldsymbol{x}(y_1, \ldots, y_{n-1}, t)$$

gładko zależne od t *i od parametrów* y_i. *Łatwo sprawdzić, że pochodna* $\mathrm{d}\Phi(\mathbf{0})$ *jest pełnego rzędu, a więc* Φ *jest lokalnym dyfeomorfizmem w otoczeniu zera. Co więcej,* $\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{y})$ *przeprowadza wektor* $\boldsymbol{e}_t$ *na wektor* $X(\Phi(\boldsymbol{y}))$. *Wnioskujemy stąd, że* Φ^{-1} *jest szukanym loklanym dyfeomorfizmem prostującym pole wektorowe.*

Zadanie 4. Rozważmy n-wymiarową rozmaitość różniczkową M i n-formę $\omega \in \Omega^n(M)$, która nigdzie nie znika (tzn. dla każdego $p \in M$ istnieją wektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathrm{T}_p M$ takie, że $\omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \neq 0$). Wykaż, że M jest orientowalna. Czy prawdziwa jest implikacja przeciwna?

Zadanie 5. Czy każda 1-forma $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ ma czynnik całkujący? Tzn. czy istnieje funkcja gładka $F : \mathbb{R}^3 \supset U \to \mathbb{R}$ taka, że $F \cdot \theta$ jest dokładna?
