12. ćwiczenia zdalne 12 maja 2020
Kohomologie de Rhama, gładki rozkład jedności

Zadanie 1. Rozważmy automorfizm $A : S^n \to S^n$ przekształcający punkt na odpowiadający mu punkt antypodyczny $A(\boldsymbol{p}) = -\boldsymbol{p}$ oraz kanoniczne rzutowanie $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ utożsamiające punkty antypodyczne. Wykaż, że:

a) Przestrzeń $\Omega^k(S^n)$ rozpada się na sumę prostą przestrzeni własnych przekształcenia A^* odpowiadających wartościom własnym 1 oraz -1 (Inaczej: każdą k-formę $\omega \in \Omega^k(S^n)$ możemy zapisać w postaci $\omega = \omega_+ + \omega_-$, gdzie $A^*\omega_+ = \omega_+$ oraz $A^*\omega_- = -\omega_-$.)

b) Wykaż, że powyższy rozkład indukuje rozkład grup kohomologii na składowe $H^k(S^n) = H^k_+(S^n) \oplus H^k_-(S^n)$.

c) Wykaż, że cofnięcie π^* odwzorowuje $\Omega^k(\mathbb{RP}^n)$ na $\Omega^k_+(\mathbb{RP}^n)$ i ponadto π^* indukuje izomorfizm grup kohomologii $H^k(\mathbb{RP}^n)$ oraz $H^k_+(S^n)$.

Korzystając z powyższego wyznacz kohomologie de Rhama przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^n$.

Rozwiązanie: Punkt a). Każdą k-formę $\omega \in \Omega^k(S^n)$ możemy zapisać jako

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega + A^*\omega) + \frac{1}{2}(\omega - A^*\omega) \ .$$

Łatwo się przekonać, że pierwszy ze składników jest niezmienniczy na operację A^*, a drugi jest antyniezmienniczny na tę operację. Stąd mamy rozkład $\Omega^k(S^n) = \Omega^k_+(S^n) \oplus \Omega^k_-(S^n)$.

Punkt b). Zauważmy, że powyższy rozkład jest respektowany przez operację różniczki zewnętrznej d, tzn. jeśli $A^*\omega = \pm\omega$ to $A^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(A^*\omega) = \pm\mathrm{d}\omega$, oraz jeśli $\omega = A^*\omega = \mathrm{d}\eta$ to $\omega = \mathrm{d}\frac{1}{2}(\eta + A^*\eta)$. Wobec tego dostajemy indukowany rozkład w kohomologiach $H^k(S^n) = H^k_+(S^n) \oplus H^k_-(S^n)$.

Punkt c). Zauważmy, że $\pi(A(p)) = \pi(p)$, stąd dla formy $\omega \in \Omega^k(\mathbb{RP}^n)$ zachodzi $A^*(\pi^*\omega) = \pi^*\omega$, a więc

$$\pi^* : \Omega^k(\mathbb{RP}^n) \longrightarrow \Omega^k_+(S^n) \ .$$

Udowodnimy teraz, że to odwzorowanie jest izomorfizmem. Różnowartościowość jest jasna: obrazem k-formy zerowej jest k-forma zerowa, a π^* jest liniowe nad $\mathbb{R}$. Epimorficzność: niech $\omega = A^*\omega$ będzie dowolną k-formą w S^n. Jej przeciwobraz ω' na $\mathbb{RP}^n$ możemy określić lokanie: dla małego zbioru otwartego $U \subset \mathbb{RP}^n$ mamy $\pi^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2$, gdzie U_1 i U_2 są kanonicznie izomorficzne ze sobą (poprzez odwzorowanie A)oraz z U (poprzez $\pi|_{U_i}$). Określamy $\omega'|_U$ jako $\omega|_{U_i}$ gdzie U_i jest dowolnym z kawałków U_1, U_2. Ponieważ $\omega = A^*\omega$ określenie ω' nie zależy od tego który z kawałków wybierzemy. Ponieważ, π^* jest izomorfizmem na $\Omega^k(\cdot)$, oraz jest przemienne z różniczką zewnętrzną d dostajemy izomorfizm grup kohomologii $H^k(\mathbb{RP}^n) \simeq H^k_+(S^n)$.

Na koniec, wyznaczmy $H^n_+(S^n)$ aby policzyć kohomologie przestrzeni rzutowej (wiadomo, że $H^0(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{R}$, zaś w stopniach $k = 1, 2, \ldots, n-1$ $H^k(S^n) = 0$, a stąd także $H^k(\mathbb{RP}^n) = 0$). Weźmy generator $\omega \in \Omega^n(S^n)$ i policzmy

$$2\int_{S^n} \omega_+ = \int_{S^n} \omega + A^*\omega$$

Zastanówmy się, co $A(\boldsymbol{p}) = -\boldsymbol{p}$ robi z orientacją sfery? Przyjmijmy orientację S^n jako brzegu standardowo zorientowanej kuli w $\mathbb{R}^{n+1}$, niech $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})$ oznacza wektor normalny zewnętrzny do S^n w punkcie $\boldsymbol{p} \in S^n$, i niech $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ będzie dodatnio zorientowaną bazą $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} S^n$. Wówczas układ $\{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ jest dodatnio zorientowaną bazą $\mathbb{R}^{n+1}$ Przekształceniu antypodyczne $A = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ zmienia orientację

$\mathbb{R}^{n+1}$ o czynnik $\operatorname{sgn}\det A = (-1)^{n+1}$. Obrazem wcześniej rozważanej bazy jest przy tym przekształceniu baza $\{-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{n}(-\boldsymbol{p}), -\boldsymbol{v}_1, \ldots, -\boldsymbol{v}_n\}$. Wynika stąd, że jeśli baza $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ była dodatnio zorientowana w przestrzeni $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} S^n$, to baza $\{-\boldsymbol{v}_1, \ldots, -\boldsymbol{v}_n\}$ ma orientację $(-1)^{n+1}$ w przestrzeni $\mathrm{T}_{-\boldsymbol{p}} S^n$. Wynika stąd, że

$$\int_{S^n} \omega = (-1)^{n+1} \int_{S^n} A^* \omega \ ,$$

a zatem

$$H^n(\mathbb{RP}^n) = H^n_+(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n = 2k \\ \mathbb{R} & \text{gdy } n = 2k+1. \end{cases}$$

Definicja. Rozważmy przestrzeń topologiczną (odpowiednio, rozmaitość różniczkową) X i pewne jej pokrycie otwarte $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. *Ciągłym* (odp. *gładkim*) *rozkładem jedności* wpisanym w pokrycie $\{U_\alpha\}$ nazywamy rodzinę funkcji ciągłych (od. gładkich) $\phi_\alpha : X \to [0, +\infty)$ o następujących własnościach

a) dla każdego $\alpha \in A$ mamy $\{x \in X \mid \Phi_\alpha(x) > 0\} \subset U_\alpha$,

b) dla każdego $x \in X$ nierówność $\phi_\alpha(x) > 0$ zachodzi dla skończenie wielu $\alpha \in A$

c) dla każdego $x \in X$ mamy $\sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(x) = 1$.

Będziemy starali się udowodnić następujące twierdzenie

Twierdzenie. *Niech M będzie sigma-zwartą rozmaitością różniczkową (wystarczy by M było przestrzenią ośrodkową). Wówczas w każde pokrycie otwarte M można wpisać gładki rozkład jedności.*

Pomocny będzie następujący fakt:

Obserwacja. Niech $B \subset \mathbb{R}^n$ będzie kulą otwartą. Istnieje wówczas pewna funkcja gładka $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, taka że $B = \{\boldsymbol{x} \mid \phi(\boldsymbol{x}) > 0\}$.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli dla przestrzeni topologicznej X i jej pokrycia otwartego $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ istnieje wpisany w nie ciągły rozkład jedności $\phi_\alpha : X \to [0, +\infty)$, to rodzina $V_\alpha = \{x \in X \mid \phi_\alpha(x) > 0\}$ jest podpokryciem lokalnie skończonym wpisanym w pokrycie $\{U_\alpha\}$.

Przestrzenie topologiczne, które mają własność, że w każde ich pokrycie otwarte da się wpisać podpokrycie lokalnie skończone nazywamy przestrzeniami *parazwartymi.*

Zadanie 3. Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jego pokryciem otwartym. Wówczas w $\{U_\alpha\}$ możemy wpisać gładki rozkład jedności na K.

Rozwiązanie: Rozważmy pokrycie zbioru K kulami wpisanymi w pokrycie U_α. Z takiego pokrycia wybierzmy podpokrycie skończone $\{V_i\}_{i \in I}$ (a wiec w szczególności również lokalnie skończone). Rozważmy funkcje gładkie $f_i : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ takie, że $V_i \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid {}_i(\boldsymbol{x}) > 0\}$ i zdefiniujmy

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = \frac{f_i(\boldsymbol{x})}{\sum_{j \in I} f_j(\boldsymbol{x})} \ .$$

To jest szukany przez nas gładki rozkład jedności wpisany w pokrycie $\{U_\alpha\}$.

`Zadanie domowe na 15 maja:`

Zadanie 4. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Wykaż, że istnieje wstępujący ciąg zbiorów otwartych $V_n \subset U$ o następujących własnościach:

a) domknięcie $\overline{V_n} \subset U$ jest zbiorem zwartym,

b) $\overline{V_n} \subset V_{n+1}$,

c) $\bigcup_n V_n = U$.

Innymi słowy, umiemy przestawić U jako sumę rosnącego ciągu zbiorów „zwarto-otwartych".