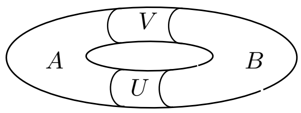
11. ćwiczenia zdalne 5 maja 2020
Kohomologie de Rhama, ciąg Mayera-Vietorisa

Zadanie 1. Używając ciągu Mayera-Vietorisa wyznacz pierwszą grupę kohomologii de Rhama torusa $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

Rozwiązanie: Rozważmy standardowy rozkład torusa na sumę dwóch rurek $\mathbb{T}^2 = A \cup B$, których przecięcie składa się z dwóch rozłącznych rurek $A \cap B = U \sqcup V$, jak na rysunku



Wypiszmy długi ciąg dokładny kohomologii związany z tym rozkładem

$$\begin{aligned} &H^0(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_0} H^0(A) \oplus H^0(B) \xrightarrow{p_0} H^0(U \sqcup V) \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_0} &H^1(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_1} H^1(A) \oplus H^1(B) \xrightarrow{p_1} H^1(U \sqcup V) \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_1} &H^2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_2} H^2(A) \oplus H^2(B) \xrightarrow{p_2} H^2(U \sqcup V) \longrightarrow 0\ . \end{aligned}$$

Z uwagi na homotopijną równoważność A, B, U i V z S^1 pierwsze dwa wiersze tego ciągu wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \xrightarrow{i_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{p_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_0} &H^1(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{p_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_1} \end{aligned}$$

Widzimy, że $H^1(\mathbb{T}^2) = \ker i_1 \oplus \operatorname{im} i_1$. Postaramy się teraz wyznaczyć te dwie podprzestrzenie. Z dokładności ciągu na pozycji $H^1(A) \oplus H^1(B)$ mamy $\operatorname{im} i_1 = \ker p_1 = \mathbb{R}$ (łatwo to sprawdzić, bo znamy wzór na p_1). Z kolei z dokładności na pozycji $H^1(\mathbb{T}^2)$ wiemy, że $\ker i_1 = \operatorname{im} \delta_0$. Cofając się o jedną pozycję $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \ker \delta_0 \oplus \operatorname{im} \delta_0$, oraz z dokładności ciągu $\ker \delta_0 = \operatorname{im} p_0 \simeq \mathbb{R}$ (ponownie znamy wzór na p_0). Stąd $\operatorname{im} \delta_0 \simeq \mathbb{R}$ i ostatecznie $H^2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Wykaż, że następujące stwierdzenia są równoważne

a) $H^n(S^n) = \mathbb{R}$, przy czym izomorfizm jest zadany przez odwzorowanie $\omega \longmapsto \int_{S^n} \omega$

b) Jeśli $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ jest formą o zwartym nośniku taką, że $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$, to istnieje $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ również o zwartym nośniku taka, że $\omega = \mathrm{d}\eta$.

Rozwiązanie: a) $\Rightarrow$ b). Weźmy $\omega \in \Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$ taką, że $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$ i załóżmy, że jej nośnik jest zawarty w pewnej kuli $\overline{B^n(\mathbf{0}, R)}$. Rozważmy teraz dyfeomorfizm $\Phi : B^n(0, 2R) \to S^n \setminus \{\boldsymbol{n}\}$ większej kuli na sferę z wyjętym biegunem północnym cofnięcie $\omega' := (\Phi^{-1})^*\omega$ jest dobrze określoną n-formą na S^n (po rozszerzeniu o zero na punkt $\boldsymbol{n}$) i ponadto

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{B^n(\mathbf{0},R)} \omega = \int_{S^n} (\Phi^{-1})^*\omega\ .$$

Na mocy własności (a) wnioskujemy, że $\omega' = \mathrm{d}\eta$ dla pewnej $(n-1)$-formy $\eta \in \Omega^{n-1}(S^n)$. Będziemy chcieli cofnąć η na $\mathbb{R}^n$ za pomocą Φ, ale najpierw musimy ją poprawić, aby znikała na pewnym otoczeniu $U_{\boldsymbol{n}} \simeq \mathbb{R}^n$ bieguna północnego. Zauważmy, że $\mathrm{d}\eta = \omega' = 0$ w pewnym takim otoczeniu, a zatem skoro $U_{\boldsymbol{n}}$ jest homotopijnie trywialne to $\eta = \mathrm{d}\alpha$ w $U_{\boldsymbol{n}}$ dla pewnej $(n-2)$-formy $\alpha \in \Omega^{n-2}(U_{\boldsymbol{n}})$. Rozszerzmy teraz α do formy określonej na całym S^n (na przykład wymnażając przez funkcje znikającą poza $U_{\boldsymbol{n}}$). Mamy wtedy $\eta = \mathrm{d}\alpha$ w $U_{\boldsymbol{n}}$, skąd $\eta' := \eta - \mathrm{d}\alpha$ ma następujące własności:

$$\eta' = 0 \text{ na pewnym otoczeniu punktu } \boldsymbol{n}\text{, oraz} \quad \mathrm{d}\eta' = \mathrm{d}(\eta - \mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}\eta = \omega' \ .$$

Wnioskujemy, że $\eta := \Phi^*\eta'$ jest dobrze określoną $(n-1)$-formą w $\mathbb{R}^n$ o zwartym nośniku oraz

$$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}(\Phi^*\eta') = \Phi^*(\mathrm{d}\eta') = \Phi^*\omega' = \Phi^*((\Phi^{-1})^*\omega) = \omega \ .$$

Co dowodzi własności (b).
b) $\Rightarrow$ a).
Postępujemy bardzo podobnie. Rozważmy najpierw dowolną n-formę $\omega \in \Omega^n(S^n)$ taką, że $\int_{S^n} \omega = 0$. Będziemy chcieli pokazać, że ω ma formę pierwotną na S^n. W pierwszym kroku zamieńmy ω na $\omega' = \omega - \mathrm{d}\alpha$ tak aby ω' znikało na pewnym otoczeniu $U_{\boldsymbol{n}}$ punktu $\boldsymbol{n}$ – aby to zrobić postępujemy analogicznie jak w poprzedniej implikacji przy przejściu z η do η'. Zauważmy, że ω' ma tę samą klasę homotopii co ω i tę samą całkę sferyczną (z tw. Stokesa $\int_{S^n} \mathrm{d}\alpha = 0$.) Teraz rozpatrzmy dyfeomorfizm $\Phi : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{\boldsymbol{n}\}$, za pomocą którego przeciągamy ω' na formę zamkniętą $\Phi^*\omega'$ w $\mathbb{R}^n$, której całka wynosi 0. Korzystając z własności (b) znajdujemy dla tej formy formę pierwotną η o zwartym nośniku. Forma $(\Phi^{-1})^*\eta$ jest dobrze określona (po przedłużeniu przez zero) na całej sferze S^n. Co więcej

$$\mathrm{d}((\Phi^{-1})^*\eta) = (\Phi^{-1})^{\mathrm{d}}\eta = (\Phi^{-1})^*(\Phi^*\omega') = \omega' \ .$$

Ostatecznie, $\omega = \omega' + \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}(\eta + \alpha)$. Co kończy dowód.

Zadanie 3. Wyznacz kohomologie de Rhama przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^2$.
Rozwiązanie: Przestrzeń rzutową $\mathbb{RP}^2$ możemy przedstawić jako sumę $\mathbb{RP}^2 = A \cup B$, gdzie A jest dyskiem, B jest wstęgą Möbiusa (homotopijną z S^1), zaś $A \cap B = S^1 \times (0,1)$ (również jest homotopijne z S^1). Dość łatwo to zobaczyć myśląc o $\mathbb{RP}^2$ jak o sferze S^2 z utożsamionymi punktami antypodycznymi. Jako A bierzemy górną połowę sfery, B jest paskiem woków równika, a $A \cap B$ górną połową tego paska. Ciąg Mayera-Vietorisa związany z tym rozkładem daje nam

$$\begin{aligned}
&H^0(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{i_0} H^0(A) \oplus H^0(B) \xrightarrow{p_0} H^0(A \cap B) \xrightarrow{\delta_0} \\
\xrightarrow{\delta_0} &H^1(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{i_1} H^1(A) \oplus H^1(B) \xrightarrow{p_1} H^1(A \cap B) \xrightarrow{\delta_1} \\
\xrightarrow{\delta_1} &H^2(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{i_2} H^2(A) \oplus H^2(B) \xrightarrow{p_2} H^2(A \cap B) \longrightarrow 0 \ .
\end{aligned}$$

Co po uwzględnieniu typów homotopijnych A, B oraz $A \cap B$ daje nam

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R} \xrightarrow{i_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{p_0} \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} \\
\xrightarrow{\delta_0} &H^1(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{i_1} 0 \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{p_1} \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_1} \\
\xrightarrow{\delta_1} &H^2(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{i_2} 0 \oplus 0 \xrightarrow{p_2} 0 \longrightarrow 0 \ .
\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że początek tego ciągu, a więc fragment $\mathbb{R} \xrightarrow{i_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{p_0} \mathbb{R}$ jest dokładny, zaś p_i jest izomorfizmem (obrazem generatora pierwszej grupy kohomologii S^1 jest ten sam generator). To nie pozostawia nam już żadnego wyboru i musimy mieć $H^1(\mathbb{RP}^2) = H^2(\mathbb{RP}^2) = 0$.

Zadanie 4. Rozważmy 1-formę $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$. Załóżmy, że $\theta(\boldsymbol{p}) \neq 0$ w pewnym punkcie $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. Wykaż, że w pewnym otoczeniu $\boldsymbol{p}$ forma θ ma czynnik całkujący, tzn. istnieje funkcja gładka $F : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ taka, że forma $F \cdot \theta$ jest dokładna. Czy analogiczny wynik jest prawdziwy dla 1-form w $\mathbb{R}^3$?

`Zadania domowe na 12 maja 2020:`

Zadanie 5. Rozważmy automorfizm $A : S^n \to S^n$ przekształcający punkt na odpowiadający mu punkt antypodyczny $A(\boldsymbol{p}) = -\boldsymbol{p}$ oraz kanoniczne rzutowanie $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ utożsamiające punkty antypodyczne. Wykaż, że:

a) Przestrzeń $\Omega^k(S^n)$ rozpada się na sumę prostą przestrzeni własnych przekształcenia A^* odpowiadających wartościom własnym 1 oraz -1 (Inaczej: każdą k-formę $\omega \in \Omega^k(S^n)$ możemy zapisać w postaci $\omega = \omega_+ + \omega_-$, gdzie $A^*\omega_+ = \omega_+$ oraz $A^*\omega_- = -\omega_-$.)

b) Wykaż, że powyższy rozkład indukuje rozkład grup kohomologii na składowe $H^k(S^n) = H^k_+(S^n) \oplus H^k_-(S^n)$.

c) Wykaż, że cofnięcie π^* odwzorowuje $\Omega^k(\mathbb{RP}^n)$ na $\Omega^k_+(\mathbb{RP}^n)$ i ponadto π^* indukuje izomorfizm grup kohomologii $H^k(\mathbb{RP}^n)$ oraz $H^k_+(S^n)$.

Korzystając z powyższego wyznacz kohomologie de Rhama przestrzeni rzutowej $\mathbb{RP}^n$.

Zadanie 6. Udowodnij twierdzenie o prostowaniu pola wektorowego.

Twierdzenie. *Niech X będzie gładkim polem wektorowym w $\mathbb{R}^n$, a $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ takim punktem, że $X(\boldsymbol{p}) \neq \boldsymbol{0}$. Wykaż, że w pewnym otoczeniu $U \ni \boldsymbol{p}$ można wprowadzić układ współrzędnych $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, w którym pole X przyjmuje postać $X = [1, 0, 0, \ldots, 0]$. (W innym języku: istnieje lokalny dyfeomorfizm $\Phi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $d\Phi(\boldsymbol{x})[X] = [1, 0, \ldots, 0]$.)*

`Zadanie pisemnie na 15 maja:`

Zadanie 7. Wyznacz (dowolną metodą) kohomologie de Rhama płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ z k dziurami.
