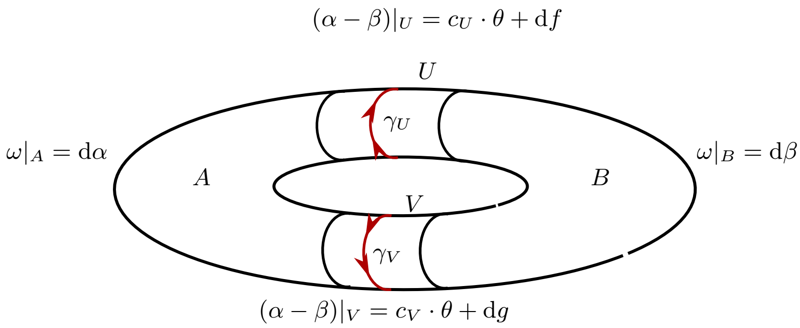
10. ćwiczenia zdalne 28 kwietnia 2020
Kohomologie de Rhama, ciąg Mayera-Vietorisa

Zadanie 1. Wyznacz drugą grupę kohomologii de Rhama 2-wymiarowego torusa $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie: Przedstawmy $\mathbb{T}^2 =$ jako sumę dwóch obszarów $M = A \cup B$, które oba są dyfeomorficzne z $S^1 \times (0,1) \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, zaś $A \cap B = U \sqcup V$, gdzie $U, V \simeq S^1 \times (0,1)$.



Obliczenie $H^2(\mathbb{T}^2)$. Weźmy dowolną 2-formę (automatycznie zamkniętą) $\omega \in \Omega^2(\mathbb{T}^2)$. Formy $\omega|_A$ i $\omega|_B$ są zamkniętymi 2-formami na obszarach dyfeomorficznych z $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, a więc są dokładne (wiemy już, że $H^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) = 0$. Istnieją zatem 1-formy $\alpha \in \Omega^1(A)$ i $\beta \in \Omega^1(B)$ takie, że $\omega|_A = \mathrm{d}\alpha$ i $\omega|_B = \mathrm{d}\beta$. Zauważmy, że wobec $\mathrm{d}\alpha|_U = \omega|_U = \mathrm{d}\beta|_U$ oraz $\mathrm{d}\alpha|_V = \omega|_V = \mathrm{d}\beta|_V$ mamy $\mathrm{d}(\alpha-\beta)|_U = 0$ i $\mathrm{d}(\alpha-\beta)|_V = 0$. Ponieważ oba obszary U i V są dyfeomorficzne z $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, którego pierwszą grupę kohomologii znamy, wnosimy, że

$$(\alpha - \beta)|_U = c_U\ \theta + \mathrm{d}f \quad \text{oraz} \quad (\alpha - \beta)|_V = c_V\ \theta + \mathrm{d}g\ ,$$

gdzie θ, $\mathrm{d}\theta = 0$ jest generatorem pierwszej grupy kohomologii $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (możemy przyjąć, że w obu obszarach ten generator pochodzi od pojedynczej 1-formy na $\mathbb{T}^2$ mierzącej obieganie wokół małego koła), zaś $f : U \to \mathbb{R}$ i $g : V \to \mathbb{R}$ to funkcje gładkie. A wiec $c_U = \int_{\gamma_U} (\alpha - \beta)$ oraz $c_V = \int_{\gamma_V} (\alpha - \beta)$, gdzie pętle γ_U i γ_V są takie jak na rysunku.

Policzmy całkę z ω po $\mathbb{T}^2$ składając ją z dwóch kawałków (A' i B' oznaczać będzie obcięcie, odpowiednio, A i B do pętli granicznych γ_U i γ_V) mamy

$$\int_{\mathbb{T}^2} \omega = \int_{A'} \omega + \int_{B'} \omega = \int_{A'} \mathrm{d}\alpha + \int_{B'} \mathrm{d}\beta \overset{\text{tw.Stokes'a}}{=} \int_{\gamma_U - \gamma_V} \alpha + \int_{\gamma_V - \gamma_U} \beta =$$
$$\int_{\gamma_U} (\alpha - \beta) - \int_{\gamma_V} (\alpha - \beta) = c_U - c_V\ ,$$

a zatem jeśli $c_U \neq c_V$ to klasa kohomologii $[\omega]$ nie jest trywialna. Oczywiście niezerową całkę łatwo zrealizować, na przykład całkując formę objętości po torusie.

Przeciwnie, jeśli $c_U = c_V = c$, to podobnie jak przy liczeniu drugich kohomologii $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ zbudujmy funkcję gładką $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ taką, że $F|_U = f$ zaś $F|_V = g$. Wówczas 1-forma

$$\eta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \alpha(\boldsymbol{x}) & \text{dla } \boldsymbol{x} \in A \\ \beta(\boldsymbol{x}) + c\ \theta(\boldsymbol{x}) + \mathrm{d}F(\boldsymbol{x}) & \text{dla } \boldsymbol{x} \in B \end{cases}$$

jest dobrze zdefiniowana, ponieważ $\alpha = \beta + c\ \theta + \mathrm{d}F$ na $A \cap B$. Ponadto spełnia ona

$$\mathrm{d}(\eta|_A) = \mathrm{d}\alpha = \omega|_A \quad \text{oraz} \quad \mathrm{d}(\eta|_B) = \mathrm{d}(\beta + c\ \theta + \mathrm{d}F) = \mathrm{d}\beta = \omega|_B\ ,$$

a więc $\omega = \mathrm{d}\eta$ jest formą dokładną. Wykazaliśmy zatem, że $H^2(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{R}$, gdzie izomorfizm jest zadany poprzez przyporządkowanie

$$\omega \longmapsto \int_{\mathbb{T}^2} \omega = c_U - c_V \ .$$

Zadanie 2. (∗) Rozważmy n-formę $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ o zwartym nośniku, taką że $\int_{R^n} \omega = 0$. Wykaż, że istnieje $(n-1)$-forma o zwartym nośniku $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}\eta$.

Rozwiązanie: Będziemy korzystali z następującego lematu

Lemat 1. *n-ta grupa kohomologii de Rhama sfery n-wymiarowej to $H^n(S^n) = \mathbb{R}$, przy czym możemy utożsamić klasę n-formy α z całką $[\alpha] = \int_{S^n} \alpha \in \mathbb{R}$.*

Powyższy lemat możemy udowodnić bezpośrednio techniką Mayera-Vietorisa korzystając z rozkładu sfery n-wymiarowej na dwie kule przecinające się wzdłuż S^{n-1}. Okazuje się on być również równoważny naszemu zadaniu. Ponieważ w dowodzie poniżej będziemy tak naprawdę korzystali z lematu dla $n-1$, więc możliwe jest ubranie naszego rozumowania w ramy dowodu indukcyjnego.

Weźmy $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ jak w treści zadania. Dowolna n-forma w $\mathbb{R}^n$ jest zamknięta, zaś $H^n(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ ($\mathbb{R}^n$ jest ściągalna), zatem istnieje pewna $(n-1)$-forma ν taka, że $\mathrm{d}\nu = \omega$. Będziemy się starali dobrać $\beta \in \Omega^{n-2}(\mathbb{R}^n)$ tak aby $\nu - \mathrm{d}\beta$ miało zwarty nośnik. Wówczas $\eta = \nu - \mathrm{d}\beta$ będzie spełniało tezę zadania (gdyż $\mathrm{d}(\eta) = \mathrm{d}(\nu - \mathrm{d}\beta) = \mathrm{d}\nu = \omega$). Wybierzmy promień R tak duży, aby $\operatorname{supp}\omega \subset B^n(\mathbf{0}, R)$. Na mocy twierdzenia Stokes'a

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{B^n(\mathbf{0},2R)} \omega = \int_{B^n(\mathbf{0},2R)} \mathrm{d}\nu = \int_{S^{n-1}(\mathbf{0},2R)} \nu \ .$$

Chcemy pokazać, że ν jest formą dokładną w $U = \mathbb{R}^n \setminus B^n(\mathbf{0}, R)$. Istotnie, ν jest zamknięta $\mathrm{d}\nu = \omega = 0$, bo jesteśmy poza nośnikiem ω. Ponadto U jest homotopijnie równoważna sferze $S^{n-1}(\mathbf{0}, 2R)$, gdzie klasa homotopii $[\nu]$ odpowiada $\int_{S^{n-1}(\mathbf{0},2R)} \nu = 0$. W istocie rozważmy homotopię

$$H : U \times [0,1] \to U, \qquad H(\boldsymbol{x}, t) = \left(1 - t + t\frac{2R}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)\boldsymbol{x} \ .$$

$H_0 = \mathrm{id}_U$ oraz H_1 jest retrakcją U na sferę $S^{n-1}(\mathbf{0}, 2R)$. Korzystając z ogólnego Lematu Poincaré istnieje algebraiczna homotopia $H : \Omega^{n-1}(U) \to \Omega^{n-2}(U)$ taka, że

$$\nu - H_1^*\left(\nu|_{S^{n-1}}\right) = \mathrm{id}_U^*\,\nu - H_1^*\nu = \mathrm{d}H(\nu) + H(\mathrm{d}\nu) = \mathrm{d}H(\nu) + 0 \ .$$

A ponieważ $\nu|_{S^{n-1}}$ jest dokładna na sferze S^{n-1}, zatem $\nu|_{S^{n-1}} = \mathrm{d}\gamma$ dla pewnej $\gamma \in \Omega^{n-2}(S^{n-1})$. Stąd

$$\nu = H_1^*(\mathrm{d}\gamma) + \mathrm{d}H(\nu) = \mathrm{d}(H_1^*\gamma + H(\nu)) \text{ – dokładna.}$$

Dowiedliśmy dokładności ν w U, a więc $\nu = \mathrm{d}\beta$ dla pewnej $(n-2)$-formy $\beta \in \Omega^{n-2}(U)$. Rozszerzmy teraz β w dowolny sposób do formy $\widetilde{\beta} \in \Omega^{n-2}(\mathbb{R}^n)$ (na przykład przedłużając jakkolwiek funkcje współrzędnościowe formy β na wnętrze koła $B(\mathbf{0}, R)$). Mamy

$$\mathrm{d}(\nu - \mathrm{d}\widetilde{\beta}) = \mathrm{d}\nu = \omega, \quad \text{oraz} \quad \operatorname{supp}(\nu - \mathrm{d}\widetilde{\beta}) \subset B^n(\mathbf{0}, R) \ .$$

Jak widzimy $\eta = \nu - \mathrm{d}\widetilde{\beta}$ spełnia tezę zadania w wymiarze n.

Ciąg Mayera-Vietorisa. *Zacznijmy od następującej definicji*

Definicja. *Kompleksem (ko)łańcuchowym* nazywamy ciąg przestrzeni liniowych (ogólniej modułów) V_n, $n \in \mathbb{Z}$ oraz odwzorowań liniowych $p_n : V_n \to V_{n+1}$ takich, że $p_{n+1} \circ p_n = 0$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\ldots \longrightarrow V_0 \xrightarrow{p_0} V_1 \xrightarrow{p_1} V_2 \xrightarrow{p_2} \ldots \longrightarrow V_n \xrightarrow{p_n} V_{n+1} \xrightarrow{p_{n+1}} V_{n+2} \xrightarrow{p_{n+2}} \ldots$$

Wynika stąd, że dla każdego n mamy $\operatorname{im} p_n \subset \ker p_{n+1}$. Mówimy, że powyższy ciąg jest *dokładny* na miejscu $n+1$ jeśli zachodzi równość $\operatorname{im} p_n = \ker p_{n+1}$. Jeśli ciąg jest dokładny na każdym miejscu mówimy o *długim ciągu dokładnym.*

Przykład. Dokładność ciągu $0 \longrightarrow V \xrightarrow{i} W \longrightarrow \ldots$ na pozycji V oznacza, że i jest monomorfizmem.

Dokładność ciągu $\ldots \longrightarrow V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$ na pozycji W oznacza, że p jest epimorfizmem.

Twierdzenie (Mayera-Vietorisa). *Rozważmy rozmaitość M i jej rozkład na dwa zbiory otwarte $M = A \cup B$. Wówczas istnieje długi ciąg dokładny kohomologii de Rhama*

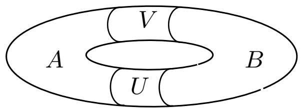
$$\ldots \xrightarrow{\partial_{k-1}} H^k(A \cup B) \xrightarrow{i_k} H^k(A) \oplus H^k(B) \xrightarrow{p_k} H^k(A \cap B) \xrightarrow{\partial_k} H^{k+1}(A \cup B) \xrightarrow{i_{k+1}} \ldots ,$$

przy czym odwzorowania i_k i p_k definiujemy następująco

$$i_k([\omega]) = ([\omega|_A], [\omega|_B]) \quad \textit{oraz} \quad p_k([\alpha], [\beta]) = [(\alpha - \beta)|_{A \cap B}] \ .$$

Zadanie 3. Używając ciągu Mayera-Vietorisa wyznacz drugą grupę kohomologii de Rhama torusa $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

Rozwiązanie: Rozważmy standardowy rozkład torusa na sumę dwóch rurek $\mathbb{T}^2 = A \cup B$, których przecięcie składa się z dwóch rozłącznych rurek $A \cap B = U \sqcup V$, jak na rysunku



Wypiszmy długi ciąg dokładny kohomologii związany z tym rozkładem

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_0} H^0(A) \oplus H^0(B) \xrightarrow{p_0} H^0(U \sqcup V) \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_0} H^1(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_1} H^1(A) \oplus H^1(B) \xrightarrow{p_1} H^1(U \sqcup V) \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_1} H^2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_2} H^2(A) \oplus H^2(B) \xrightarrow{p_2} H^2(U \sqcup V) \longrightarrow 0 \ . \end{aligned}$$

Z uwagi na homotopijną równoważność A, B, U i V z S^1 ostatnie dwa wiersze tego ciągu wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\delta_0} H^1(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{p_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_1} H^2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{i_2} 0 \xrightarrow{p_2} 0 \longrightarrow 0 \ . \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $H^2(\mathbb{T}^2) = \ker i_2$, a z dokładności ciągu na pozycji $H^2(\mathbb{T}^2)$ wnosimy, że że $\operatorname{im} \delta_1 = \ker i_2 = H^2(\mathbb{T}^2)$. Z kolei z dokładności ciągu na poprzedzającej pozycji mamy $\ker \delta_1 = \operatorname{im} p_1$. Wiemy z kolei, że $p_i([\alpha], [\beta]) = ([\alpha - \beta], [\alpha - \beta])$, zatem $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \supset \mathbb{R}[1, 1] = \operatorname{im} p_1$, a wiec $\ker \delta_1 = \operatorname{im} p_1 \simeq \mathbb{R}$. Wreszcie wobec $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \ker \delta_1 \oplus \operatorname{im} \delta_1$ wnosimy, że $\operatorname{im} \delta_1 = \mathbb{R} = H^2(\mathbb{T}^2)$.

`Zadania domowe na 5 maja:`

Zadanie 4. Używając ciągu Mayera-Vietorisa wyznacz pierwszą grupę kohomologii de Rhama torusa $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

Zadanie 5. Wyznacz kohomologie de Rhama sfery S^n.

Zadanie 6. ($*$) Niech M będzie zwartą rozmaitością. Wykaż, że wszystkich $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$H^{k+1}(M \times S^1) = H^k(M) \oplus H^{k+1}(M) \ .$$

Oblicz kohomologie n-wymiarowego torusa $\mathbb{T}^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$