AM II.2 2019/20 (gr. $*$)

1. ćwiczenia zdalne 13 marca 2020 – splot i wygładzanie

Na dzisiejszych, zdalnych ćwiczeniach będziemy zajmowali się pojęciem splotu. Definiujemy go w $\mathbb{R}^n$, ale pojęcie to można rozszerzyć z zachowaniem podstawowych własności na dowolną lokalnie zwartą grupę abelową (całkuje się wówczas względem odpowiedniej miary Haara – będzie na wykładzie – a odejmowanie zastępuje się dzieleniem grupowym).

Definicja. Rozważmy funkcję całkowalne $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Splotem funkcji f i g nazywamy funkcję $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n(\boldsymbol{y}) \ .$$

Intuicja stojąca za tą definicją jest taka, że $f * g(\boldsymbol{x})$ to uśrednienie funkcji g wokół $\boldsymbol{x}$ po całym $\mathbb{R}^n$ za pomocą funkcji f – pomocne może być rozważenie sytuacji, gdy $f = \chi_{B^n(\mathbf{0},1)}$. Zacznijmy od udowodnienia kilku podstawowych własności.

Zadanie 1. (podstawowe własności splotu) Wykaż, że dla dowolnych funkcji całkowalnych $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(a) funkcja $\boldsymbol{y} \mapsto f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ jest całkowalna dla p.w. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, w związku z czym splot $(g * f)(\boldsymbol{x})$ jest dobrze określony dla p.w. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) zachodzi nierówność $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

(c) splot jest przemienny, tj. $f * g = g * f$.

(d) splot jest łączny, tj. $f * (g * h) = (f * g) * h$.

W dalszej części ćwiczeń będziemy się starali rozszerzyć klasę funkcji, które splatamy i pokazać jakie własności otrzymanego splotu dziedziczone są z funkcji splatanych. Na początku pokażemy co się stanie gdy klasę L^1 zastąpimy klasą L^p.

Zadanie 2. Dla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ udowodnij, że splot $(f * g)(\boldsymbol{x})$ jest dobrze określony dla p.w. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ oraz że zachodzi następująca nierówność Younga:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1 \ .$$

Wskazówka: Oszacuj $(f * g)(\boldsymbol{x})$ z nierówności Höldera.

Teraz zbadamy regularność splotu funkcji z L^1 z funkcjami wyższej regularności.

Zadanie 3. (regularność splotu) Wykaż, że jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, zaś

(a) funkcja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalna i ograniczona, to splot $f * g$ jest dobrze określony i ograniczony.

(b) funkcja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest w klasie $C_c(\mathbb{R}^n)$, bądź $C_0(\mathbb{R}^n)$ (odpowiednio: funkcje ciągłe o zwartym nośniku i funkcje ciągłe znikające w nieskończoności) to splot $f * g$ jest jednostajnie ciągły.

(c) funkcja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest jest w klasie $C_c^k(\mathbb{R}^n)$, to splot $f * g$ jest klasy $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Ponieważ funkcje L^1 wraz z operacją splotu tworzą algebrę, warto spytać, czy w tej algebrze jest jedynka.

Zadanie 4. (jedynka splotowa) Rozstrzygnij czy istnieje funkcja całkowalna $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnej fukcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zachodzi równość $f * \delta = f$?

Mimo braku jedynki splotowej, możemy taką jedynkę aproksymować, przy okazji poprawiając regularność splatanej funkcji.

Definicja. Niech $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie ustaloną funkcją gładką, nieujemną, o zwartym nośniku zawartym w kuli jednostkowej $B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$. Załóżmy dodatkowo, że $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$. *Jedynką aproksymatywną* nazywamy rodzinę funkcji

$$\phi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) := \varepsilon^{-n} \Phi\left(\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{x}\right) .$$

Zadanie 5. (aproksymacja gładka) Niech $\phi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie jedynką aproksymatywną. Wykaż, że

(a) funkcja $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ to $f * \phi_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$ jednostajnie oraz w normie L^1.

(b) funkcja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ to $f * \phi_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$ w normie L^1. *Wskazówka*: Funkcje ciągłe o zwartym nośniku są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Wywnioskuj, że zbiory $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

`Zadania domowe na 17 marca 2020:`

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, a $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ i liczby $p, q \geq 1$ są Hölderowsko sprzężone (dopuszczamy sytuację $p = 1$ i $q = \infty$), to splot $f * g$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną.

Zadanie 7. Wykaż, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem miary dodatniej i skończonej, to różnica algebraiczna $A - A$ zawiera odcinek $[-a, a]$ dla pewnego $a > 0$.

To zadanie raczej ciężko będzie robić używając splotów (ale mogę się mylić), ale jest dość ciekawe i nawiązuje tematycznie do poprzedniego.

Zadanie 8. Rozważmy klasyczny zbiór Cantora $C \subset \mathbb{R}$. Oblicz sumę i różnicę algebraiczną $C + C$ i $C - C$.

`Zadanie dla chętnych - uogólnienie nierówności z zadania 2.`

Zadanie 9. Dla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ udowodnij, że splot $(f * g)(\boldsymbol{x})$ jest dobrze określony dla p.w. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ oraz że zachodzi następująca nierówność Younga:

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ ,$$

gdzie wykładniki $p, q, r \geq 1$ spełniają zależność $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$.

Wskazówki

- **Zadanie 1**: (a) i (b) tw. Fubini'ego (plus założenie, że f i g są dodatnie), (c) zamiana zmiennych, (d) zamiana zmiennych.
- **Zadanie 2**: Konkretniej, spróbuj oszacować splot $f * g(\boldsymbol{x})$ przez splot $f^p * g(\boldsymbol{x})$. Załóż że funkcje f i g są dodatnie.
- **Zadanie 3**: (b) użyj jednostajnej ciągłości g, (c) użyj twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki.
- **Zadanie 4**: Jak wygląda nośnik δ i co można powiedzieć o normie $\|\delta\|_1$?
- **Zadanie 5**: Co można powiedzieć o $\operatorname{supp} \phi_\varepsilon$ i $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon$?
- **Zadanie 6**: Wykorzystaj poprzednie zadanie.

- **Zadanie 7**: Co można powiedzieć o splocie funkcji $\chi_A * \chi_B$?
- **Zadanie 8**: Rozwiązań jest kilka. Jedno z ładniejszych wykorzystuje geometryczną interpretację różnicy algebraicznej zbiorów.
- **Zadanie 9**: Można spróbować uogólnić dowód z zadania 2.