AM II.2 2019/20 (gr. $*$).

Temat 1: Całka Lebesgue'a

(28 lutego 2020)

Zadanie 1. Niech $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wykaż, że

$$\lim_{y \to 0} \int_0^{\infty} \frac{y \cdot f(x)}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0) \ .$$

Twierdzenie (Różniczkowanie pod znakiem całki). *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym, $I \subset \mathbb{R}$ otwartym podzbiorem prostej $\mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcja $f : I \times A \to \mathbb{R}$ ma następujące własności:*

- *Dla każdego $t \in I$ funkcja $f(t, \cdot) : A \to \mathbb{R}$ jest całkowalna*
- *Funkcja $f(t, \boldsymbol{x})$ jest różniczkowalna względem zmiennej t.*
- *Istnieje funkcja całkowalna $g : A \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $t \in I$ zachodzi $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t, \boldsymbol{x})\right| \leq g(x)$.*

Wówczas możemy różniczkować f pod znakiem całki, tzn.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int_A f(t, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) \right] = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(t, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) \ .$$

Zadanie 2. Udowodnij twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki.

Zadanie 3. Oblicz całkę przy warunku $a > b > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \mathrm{d}x \ .$$

Twierdzenie (Fubini'ego). *Niech $f : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a (albo mierzalną i nieujemną). Punkt w $\mathbb{R}^{n+k}$ oznaczmy jako parę $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^{n+k}$. Wówczas funkcja $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)$ jest całkowalna (odp. mierzalna) dla p.w $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^k$, zaś funkcja $\boldsymbol{y} \mapsto f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y})$ jest całkowalna (odp. mierzalna) dla p.w $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Ponadto zachodzi równość*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^{n+k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n(\boldsymbol{x}) \right) \mathrm{d}^k(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^k(\boldsymbol{y}) \right) \mathrm{d}^n(\boldsymbol{x}) \ .$$

Innymi słowy całkowanie po parze zmiennych $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ sprowadza się do iterowanego całkowania (w dowolnej kolejności) po każdej ze zmiennych z osobna.

Zadanie 4. Korzystając z twierdzenia Fubini'ego znajdź wzór na objętość kuli n-wymiarowej.

`Zadania domowe na 3 lutego 2020:`

Zadanie 5. Oblicz całki korzystając z twierdzenia Fubini'ego wykaż, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} \mathrm{d}^2(x,y) = \zeta(2)$$

i obblicz następujące całki:

$$(a) \quad \int_{[0,1]^2} \frac{1}{(1-xy)^2} \mathrm{d}^2(x,y)$$

$$(b) \quad \int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}} \mathrm{d}^2(x,y) \ .$$

Zadanie 6. Oblicz całkę

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos^2 x) \mathrm{d}x \ .$$

`(3 marca 2020)`

Omówienie zadań domowych.

Twierdzenie (O zamiannie zmiennych w całce)**.** *Rozważmy zbiór otwarty* $U \subset \mathbb{R}^n$*, dyfeomorfizm* $\Phi : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ *oraz funkcję* f *całkowalną na zbiorze* $\Phi(U)$*. Wówczas funkcja* $\boldsymbol{x} \mapsto f(\Phi(\boldsymbol{x})) \cdot |\det \mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{x})|$ *jest całkowalną na* U*, oraz zachodzi równość*

$$\int_U f(\Phi(\boldsymbol{x})) \cdot |\det \mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{x})| \mathrm{d}^n(\boldsymbol{x}) = \int_{\Phi(U)} f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n(\boldsymbol{y}) \ .$$

Zadanie 7. Zastosuj podstawienie $x = a^2 \cdot \frac{1+b^2}{1+a^2}$, $y = b^2 \cdot \frac{1+a^2}{1+b^2}$ co całki

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}} \mathrm{d}^2(x,y)$$

i wykaż, że $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Dygresja o wzorze na objętość kuli n-wymiarowej. Używając tw. Fubiniego do kuli $n+2$ *wymiarowej, w podziale* $(\boldsymbol{x},(y,z)) \in R^n \times \mathbb{R}^2$*. Łatwo uzyskamy*

$$\lambda_{n+2} = \lambda_n \int_{B^2(0,1)} (1-y^2-z^2)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}^2(y,z) = \Big| \textit{podstawienie biegunowe} \Big| = \lambda_n \cdot \int_{[0,1]} \int_{[0,2\pi]} (1-r^2)^{\frac{n}{2}} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi =$$

$$\pi \cdot \lambda_n \cdot \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}(r^2) = \pi \cdot \lambda_n \cdot \frac{2}{n+2} (1-r^2)^{\frac{n+2}{2}} \Big|_1^0 = \pi \cdot \lambda_n \cdot \frac{2}{n+2} \ .$$

W ten sposób zaoszczędzimy sobie jednego całkowania przez części, z którym mieliśmy wcześniej pewne kłopoty.

Zadanie 8. Wyznacz funkcję

$$I(a) := \int_0^{+\infty} \exp\left[-x^2 - a^2 \frac{1}{x^2}\right] \mathrm{d}x \ ,$$

gdzie $a \in [0, +\infty)$.

`Zadania domowe na 6 marca 2020:`

Zadanie 9. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu $(x^2 + y^2)^{3/2} = y$.
Zadanie 10. Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna i jej pochodna f' jest ograniczona na $[a, b]$. Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej wykaż, że

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \ .$$

Zadanie 11. (∗) Prostokąt $P \subset \mathbb{R}^2$ jest skończoną sumą prostokątów, z których każdy ma co najmniej 1 bok o długości całkowitej. Wykaż, że co najmniej jeden z boków P ma długość będącą liczbą całkowitą.

Nadal do zrobienia pozostaje zadanie 6. Wskazówka: rozważyć $\ln(1 + t \cdot \cos^2(x))$.

`(6 marca 2020)`

Dokończenie zadania 8, omówienie zadań domowych.

Zadanie 12. Niech μ będzie miarą przeliczalnie addytywną w $\mathbb{R}^n$ określoną na σ-ciele zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że μ jest wielokrotnością n-wymiarowej miary Lebesgue'a.

`Zadania domowe na 13 marca 2020:`

Zadanie 13. Niech $A \subset [0, 1]$ będzie zbiorem mierzalnym i niech $f(x) = l_1(A \cap [0, x])$. Wykaż, że

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} l_1(A)^2 \ .$$

Zadanie 14. Oblicz miarę zbioru

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y, \frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2, 1 \leq xy \leq 2\} \ .$$

Zadanie 15. (∗) Rozważmy prostokąt P o bokach $a \times b$ i rodzinę kul $B_i := B(\boldsymbol{a}_i, r_i) \subset P$, gdzie $i = 1, 2, 3, \ldots$. Załóżmy, że kule B_i pokrywają P z dokładnością do zbioru miary zero (tzn. $\lambda^2(P \setminus \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = 0$). Wykaż, że $\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i = +\infty$.
