AM II.2 2019/20 (gr 3)

9 ćwiczenia zdalne – 23 kwietnia 2020. Miara powierzchniowa

Zadanie 1. Oblicz miarę powierzchniową torusa $T = \{(x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Zakładamy $R > r > 0$.

Rozwiązanie: Sposób 1. Wprowadźmy parametryzację torusa

$$\Phi : (\alpha, \beta) \longmapsto ((R + r\cos\beta)\cos\alpha, (R + r\cos\beta)\sin\alpha, r\sin\beta) \ ,$$

gdzie $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$. Mamy $\boldsymbol{v}_1 := \mathrm{d}\Phi[e_\alpha] = [-(R+r\cos\beta)\sin\alpha, (R+r\cos\beta)\cos\alpha, 0]$ oraz $\boldsymbol{v}_2 := \mathrm{d}\Phi[e_\beta] = [-r\cos\alpha\sin\beta, -r\sin\alpha\sin\beta, r\cos\beta]$, skąd $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle = (R + r\cos\beta)^2$, $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = 0$ oraz $\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\rangle = r^2$. Stąd już łatwo wyliczymy, że odpowiedni wyznacznik Gramma równy $r \cdot R$. Zatem

$$\sigma_2(T) = \int_{(0,2\pi)^2} r \cdot (R + r\cos\beta)\ \mathrm{d}^2(\alpha\beta) = 2\pi R \cdot 2\pi r \ .$$

Sposób 2. Potraktujmy górną połówkę torusa jako wykres funkcji $f(x, y) = \sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2}$ leżący nad pierścieniem $P = \{(x, y) \mid (R - r)^2 \le x^2 + y^2 \le (R + r)^2\}$. Policzmy

$$\nabla f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{\sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2}\ \sqrt{x^2 + y^2}}[x, y] \ .$$

Skąd po prostych rachunkach $\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2}}$. Zatem

$$\sigma_2(T) = 2\int_P \frac{r}{\sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2}}\ \mathrm{d}^2(x, y) = \Big|\text{podstawienie biegunowe } (\rho, \phi)\Big| \overset{\text{Fub.}}{=}$$

$$2\int_{R-r}^{R+r}\int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{r^2 - (\rho - R)^2}}\ \rho\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho = 4\pi r\int_{R-r}^{R+r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - (\rho - R)^2}}\ \rho\ \mathrm{d}\rho = \Big|t = \rho - R,\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\rho\Big| =$$

$$4\pi r \cdot \int_{-r}^{r} \frac{(R + t)}{\sqrt{r^2 - t^2}}\mathrm{d}t \overset{\text{symetria}}{=} 4\pi r \cdot \int_{-r}^{r} \frac{R}{\sqrt{r^2 - t^2}}\mathrm{d}t = 2\pi r \cdot 2\pi R \ .$$

Zadanie 2. Znaleźć położenie środka masy jednorodnej półsfery $S_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \ge 0\}$ o gęstości powierzchniowej ρ.

Rozwiązanie: Z symetrii problemu jasno wynika, że $\langle x\rangle = \langle y\rangle = 0$. Pozostaje policzyć $\langle z\rangle$. Poza tym wiemy, że $\sigma_2(S_+) = 2\pi R^2$.
Sposób 1. Rozważmy standardową parametryzację półsfery S_+ za pomocą kątów Eulera:

$$\Phi : (\phi, \beta) \mapsto (R\ \cos\phi\ \cos\beta, R\ \sin\phi\ \cos\beta, R\ \sin\beta) \ ,$$

gdzie $\phi \in (0, 2\pi)$ i $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Różniczkując parametryzację $e_1 := \mathrm{d}\Phi[e_\phi] = R\cos\beta[-\sin\phi, \cos\phi, 0]$ i $e_2 := \mathrm{d}\Phi[e_\beta] = R[-\cos\phi\ \sin\beta, -\sin\phi\ \sin\beta, \cos\beta]$, a więc $\langle e_1, e_1\rangle = R^2\cos^2\beta$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ oraz

$\langle e_2, e_2\rangle = R^2$. Stąd odpowiedni wyznacznik Gramma wynosi $R^2\cos\beta$ (moduł nie jest potrzebny w rozważanym zakresie kątów). Wobec tego

$$\langle z\rangle = \frac{1}{\sigma_2(S_+)}\int_{(0,2\pi)\times(0,\frac{\pi}{2})} R\sin\beta\ R^2\cos\beta \mathrm{d}^2(\phi,\beta) \overset{\text{Fub.}}{=} \frac{R^3}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\beta\ \cos\beta\mathrm{d}\beta =$$
$$\frac{2\pi R^3}{2\pi R^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin^2\beta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R}{2}\ .$$

Sposób 2. Półsfera jest wykresem funkcji $z = \sqrt{R^2 - x^2 + y^2} = f(x,y)$ nad kołem $B^2(\mathbf{0},R) = \{x^2+y^2 \leq R\}$. Mamy $\nabla f = \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}[x,y]$. Stosując wzór na całkę powierzchniową po wykresie dostajemy

$$\langle z\rangle = \frac{1}{\sigma^2(S_+)}\int_{B^2(\mathbf{0},R)} f(x,y)\sqrt{1+\|\nabla f(x,y)\|^2}\mathrm{d}^2(x,y) = \frac{1}{2\pi R^2}\int_{B^2(\mathbf{0},R)} f(x,y)\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}^2(x,y) =$$
$$\frac{1}{2\pi R^2}\int_{B^2(\mathbf{0},R)}\frac{R\ \sqrt{R^2-x^2+y^2}}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}^2(x,y) = R\ \frac{\lambda_2(B^2(\mathbf{0},R))}{2\pi R^2} = R\frac{\pi R^2}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}\ .$$

Sposób 3. Wprowadźmy współrzędne walcowe ($x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = z$) Sfera o promieniu R jest opisana równaniem $r^2 + z^2 = R^2$ skąd dostajemy jej następującą parametryzację

$$\Phi : (\phi, z) \longmapsto (\sqrt{R^2-z^2}\cos\phi, \sqrt{R^2-z^2}\sin\phi, z = z)\ ,$$

przy czym interesujący nas wycinek odpowiada parametrom $z \in [0,R]$ zaś $\phi \in (0,2\pi)$. Różniczkując mamy $e_1 := \mathrm{d}\Phi[e_\phi] = \sqrt{R^2-z^2}[-\sin\phi,\cos\phi,0]$ i $e_2 := \mathrm{d}\Phi[e_z] = [\frac{-z}{\sqrt{R^2-z^2}}\cos\phi\ ,\frac{-z}{\sqrt{R^2-z^2}}\sin\phi,1]$, a więc $\langle e_1,e_1\rangle = R^2 - z^2$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ oraz $\langle e_2,e_2\rangle = 1 + \frac{z^2}{R^2-z^2} = \frac{R^2}{R^2-z^2}$. Stąd odpowiedni wyznacznik Gramma wynosi R. Liczymy

$$\langle z\rangle = \frac{1}{2\pi R^2}\int_{(0,2\pi)\times(0,R)} z\ R\ \mathrm{d}^2(\phi,z) = \frac{2\pi R}{2\pi R^2}\ \frac{z^2}{2}\Big|_0^R = \frac{R}{2}\ .$$

`Zadania domowe na 30 kwietnia 2020:`

Zadanie 3. Oblicz pole powierzchni wycinka sfery $S^2(\mathbf{0},R)$ zawartego między płaszczyznami $z = a$ i $z = b$, gdzie $a, b \in [-R,R]$.

Zadanie 4. Oblicz masę miseczki parabolicznej $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2+y^2, z \in [0,1]\}$ o gęstości powierzchniowej $\rho(x,y,z) = z$.

`Pisemne na 30 kwietnia 2020:`

Zadanie 5. Oblicz moment bezwładności sfery (o promieniu R i jednorodnej gęstości powierzchniowej ρ) względem osi przechodzącej przez jej środek.
