AM II.2 2019/20 (gr 3)

8 i 9. ćwiczenia zdalne – 21 i 23 kwietnia 2020.
Miara powierzchniowa – propozycje zadań

Zadanie 1. Wyznacz położenie środka ciężkości jednorodnego drutu w kształcie łuku krzywej o równaniu $r = 1 + \cos\phi$, gdzie $\phi \in [0, \pi]$.

Rozwiązanie: Mamy naturalną parametryzację za pomocą kąta

$$\phi \mapsto \gamma(\phi) = (r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi) \ .$$

Liczyliśmy już wcześniej $\|\gamma'(\phi)\| = \sqrt{2 + 2\cos\phi} = 2\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ oraz $l(\gamma) = 4$ (poprzednio liczyliśmy długość całej kardioidy). Pozostaje nam policzyć (będziemy używać oznaczeń $s = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ i $c = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$)

$$\begin{aligned}\langle x\rangle =& \frac{1}{l}\int_0^\pi (1+\cos\phi)\cos\phi\ 2\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\ \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+c^2-s^2)(c^2-s^2)c\mathrm{d}\phi = \\ & \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+(1-s^2)-s^2)(1-s^2-s^2)c\mathrm{d}\phi = \int_0^\pi (1-s^2)(1-2s^2)c\ \mathrm{d}\phi = \left| s = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right),\ \mathrm{d}s = \frac{1}{2}c\ \mathrm{d}\phi\right| = \\ & 2\int_0^1 (1-s^2)(1-2s^2)\mathrm{d}s = \ldots = \frac{4}{5} \\ \langle y\rangle =& \frac{1}{l}\int_0^\pi (1+\cos\phi)\sin\phi\ 2\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\ \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^\pi (s^2+c^2+c^2-s^2)2sc\ c\mathrm{d}\phi = 2\int_0^\pi c^3 s\mathrm{d}\phi = \\ & \left| c = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right),\ \mathrm{d}c = -\frac{1}{2}s\ \mathrm{d}\phi\right| = -4\int_1^0 c^4\mathrm{d}c = \frac{4}{5}\ .\end{aligned}$$

Odp: $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$.

Miara i całka powierzchniowa. *Rozważmy podrozmaitość k-wymiarową $M \subset \mathbb{R}^n$ sparametryzowaną przekształceniem gładkim $\Psi : \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^n$ (tzn. $M = \Psi(U)$). Wówczas k-wymiarowa miara podrozmaitości M to*

$$\sigma_k(M) = \int_U \sqrt{\det\left[\mathrm{d}\Psi^T(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})\right]}\mathrm{d}^k(\boldsymbol{x})\ .$$

Wielkość $\sqrt{\det\left[\mathrm{d}\Psi^T(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})\right]} = \sqrt{\det\left[\langle\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})[e_i], \mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})[e_j]\rangle\right]}$ to pierwiastek z wyznacznika Gramma, a więc k-wymiarowa objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\{\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})[e_1], \mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})[e_2], \ldots, \mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})[e_k]\}$, gdzie $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ oznacza standardową bazę ortonormalną w $\mathbb{R}^k$. Tak zdefiniowana wielkość $\sigma^k(M)$ nie zależy od wyboru parametryzacji zbioru M (dowód używa twierdzenia o zamianie zmiennej w całce).

Ogólniej możemy określić całkę z funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na zbiorze M względem miary powierzchniowej σ_k wzorem

$$\int_M f\ \mathrm{d}\sigma_k = \int_U f(\Psi(\boldsymbol{x}))\ \sqrt{\det\left[\mathrm{d}\Psi^T(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Psi(\boldsymbol{x})\right]}\ \mathrm{d}^k(\boldsymbol{x})\ .$$

Również ta wielkość nie zależy od konkretnego wyboru parametryzacji zbioru M.

Przykład (Długość krzywej parametrycznej)**.** Rozważmy krzywą gładką $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n$. Wówczas

$$\det\left[\mathrm{d}\gamma(t)^T\mathrm{d}\gamma(t)\right] = \gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \ldots + \gamma_n'(t)^2 = \|\gamma'(t)\|^2\ ,$$

a zatem długość tej krzywej to

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 \cdot \mathrm{d}\sigma_1 := \int_I \|\mathrm{d}\gamma(t)\|\mathrm{d}t ,$$

zgodnie z naszym wcześniejszym wzorem.

Zadanie 2. Oblicz miarę powierzchniową sfery 2-wymiarowej $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

`Zadania domowe na 23 kwietnia:`

Zadanie 3. Oblicz miarę powierzchniową sfery 2-wymiarowej $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ używając parametryzacji

$$(x,y) \longmapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) .$$

Zadanie 4. Powierzchnia $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ jest wykresem funkcji gładkiej $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ (tzn. $\Sigma = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \mid \boldsymbol{x} \in U\}$). Wykaż, że

$$\sigma_n(\Sigma) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f(\boldsymbol{x})\|^2} \mathrm{d}^n(\boldsymbol{x}) .$$

Uwaga. Jeśli wersja ogólna okaże się zbyt trudna, wystarczy sprawdzić dla $n = 2$.
