AM II.2 2019/20 (gr 3)

7. ćwiczenia zdalne – 16 kwietnia 2020. Trochę geometrii, wstęp do miary powierzchniowej – propozycje zadań

Definicja. *Momentem bezwładności* zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ o gęstości $\rho : A \to [0, +\infty)$ względem prostej l nazywamy liczbę

$$I_l(A) := \int_A \mathrm{dist}(l, \boldsymbol{x})^2 \cdot \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) \ ,$$

gdzie $\mathrm{dist}(l, \boldsymbol{x})$ oznacza odległość punktu $\boldsymbol{x}$ od osi l.

Zadanie 1. Znaleźć moment bezwładności jednorodnej kuli o promieniu R i gęstości ρ względem osi przechodzącej przez jej środek.

Zadanie 2. Znaleźć moment bezwładności jednorodnej kuli o promieniu R i gęstości ρ względem osi odległej o d od jej środka.

Zadanie 3. (Twierdzenie Steinera – moment bezwładności przy translacji osi) Rozważmy zbiór $A \subset \mathbb{R}^3$ o gęstości $\rho : A \to [0, +\infty)$. Niech prosta $\widehat{l}$ będzie translacją prostej l o wektor $\boldsymbol{d} \perp l$. Wykaż, że zachodzi równość

$$I_{\widehat{l}}(A) = I_l(A) + M\|\boldsymbol{d}\|^2 - 2M\boldsymbol{d} \circ \langle \boldsymbol{r}(A) \rangle \ ,$$

gdzie M to masa zbioru A, zaś $\langle \boldsymbol{r}(A) \rangle$ to położenie środka masy liczone względem osi l. Sprawdzić zgodność powyższych zadań z tym wzorem.

Rozwiązanie: Niech $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})$ oznacza wektor realizujący odległość punktu $\boldsymbol{p}$ od osi l, zaś $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})$ wektor realizujący odległość puntu $\boldsymbol{p}$ od osi $\widehat{l}$. Zachodzi równość

$$\boldsymbol{s}(p) = -\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{d} \ ,$$

skąd na mocy twierdzenia kosinusów

$$\|\boldsymbol{s}\|^2 = \|\boldsymbol{r}\|^2 + \|\boldsymbol{d}\|^2 - 2\boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{d} \ .$$

Skąd mamy

$$I_{\widehat{l}}(A) = \int_A \|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})\|^2 \rho(\boldsymbol{p}) \ \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} = \int_A \left[\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})\|^2 + \|\boldsymbol{d}\|^2 - 2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}) \circ \boldsymbol{d}\right] \rho(\boldsymbol{p}) \ \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} =$$
$$\int_A \|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p})\|^2 \rho(\boldsymbol{p}) \ \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} + \int_A \|\boldsymbol{d}\|^2 \rho(\boldsymbol{p}) \ \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} - \int_A 2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}) \circ \boldsymbol{d} \ \rho(\boldsymbol{p}) \ \mathrm{d}^3\boldsymbol{p} = I_l + M\|\boldsymbol{d}\|^2 - 2\boldsymbol{d} \circ \langle \boldsymbol{r}(A) \rangle \ .$$

Miara krzywej parametrycznej. *Rozważmy krzywą gładką $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n$. Wówczas długość tej krzywej to*

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 \, \mathrm{d}\sigma^1 := \int_I \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t \ ,$$

gdzie $\|\gamma'(t)\|$ oznacza długość euklidesową różniczki odwzorowania γ w punkcie t. Intuicja fizyczna jest taka, że wielkość $\|\gamma'(t)\|$ to prędkość z jaką poruszamy się po krzywej w danej parametryzacji. Intuicja matematyczna: $\|\gamma'(t)\|$ mówi jak bardzo nasza parametryzacja rozciąga albo skraca standardową miarę na $I \subset \mathbb{R}$.

Podobnie możemy zdefiniować całkę z funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzdłuż krzywej γ *jako*

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}\sigma^1 := \int_I f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t \ .$$

Zadanie 4. Oblicz długość krzywych:

(a) $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \in \mathbb{R}^3$ gdzie $t \in [0, T]$.

(b) opisanej we współrzędnych biegunowych równaniem $r = 1 + \cos\phi$, gdzie $\phi \in [0, 2\pi]$.

`Zadania domowe na 21 kwietnia 2020:`

Zadanie 5. Dokończyć poprzednie zadanie: obliczyć długość kardioidy.

Zadanie 6. Rozważmy krzywą zadaną parametrycznie we współrzędnych biegunowych (r, ϕ) zależnością gładką $\gamma = \{(r(t), \phi(t)) \mid t \in [a, b]\}$. Wykaż że

$$l(\gamma) = \int_{[a,b]} \sqrt{r'(t)^2 + r^2\phi'(t)^2} \, \mathrm{d}t \ .$$

Zadanie 7. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego walca $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < R^2, |z| < h\}$ o gęstości ρ względem prostej OZ oraz względem prostej OX.

`Dla koneserów (nieobowiązkowe):`

Zadanie 8. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego walca $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < R^2, |z| < h\}$ o gęstości ρ względem prostej $x = y = z$.

Zadanie 9. Oblicz miarę zbioru

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1, y^2 + z^2 < 1\} \ .$$

Wskazówka: $2\int \sqrt{1 - y^2} \, \mathrm{d}y = \arcsin y + y\sqrt{1 - y^2}$.
