AM II.2 2019/20 (gr 3)

6. ćwiczenia zdalne – 7 kwietnia 2020. Sploty, trochę geometrii

Zadanie 1. (trudniejsze) Zdefiniujmy rodzinę funkcji $\phi_\lambda(x) := \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ dla $\lambda > 0$. Niech $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o nośniku zawartym w pewnej kuli $B(0, R)$. Wykaż, że

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \|\phi_\lambda * g - g\|_{L^1} = 0 \ .$$

Wskazówka: wykorzystaj fakt, że $\int_\mathbb{R} \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y = 1$.

Rozwiązanie: Chcemy oszacować z góry wartość całki $\|g-g*\phi_\lambda\|_{L^1} = \int_\mathbb{R} |g(x)-g*\phi_\lambda(x)|\mathrm{d}x$. Korzystając z równości $\int_\mathbb{R} \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y = 1$ mamy

$$\int_\mathbb{R} |g(x) - (g * \phi_\lambda)(x)|\mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} |g(x)\ 1 - (g * \phi_\lambda)(x)|\mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} \left|g(x) \int_\mathbb{R} \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y - \int_\mathbb{R} g(x-y)\phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\right| \mathrm{d}x \leq$$
$$\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} |g(x) - g(x-y)|\, \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \ .$$

Będziemy teraz chcieli podzielić powyższą całkę na dwa kawałki: dla małych y i dla dużych y. W pierwszym przypadku mamy dobrą kontrolę nad różnicą $|g(x) - g(x-y)|$, zaś w drugim nad całką z funkcji $\phi_\lambda(y)$. Łącząc te dwa oszacowania udowodnimy tezę.

Przejdźmy do konkretów. Wybierzmy $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości funkcji g istnieje $\delta > 0$ (b.s.o. możemy założyć, że $\delta < R$) takie, że $|g(x)-g(x-y)| < \varepsilon$ o ile $|y| < \delta$. Ponadto niech $M = \sup_{y\in\mathbb{R}} |g(y)|$. Mamy

$$\begin{aligned}\int_\mathbb{R} |g(x)-(g * \phi_\lambda)(x)|\mathrm{d}x &\leq \int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} |g(x) - g(x-y)|\, \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\ &\int_\mathbb{R}\int_{\{|y|<\delta\}} |g(x) - g(x-y)|\, \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_\mathbb{R}\int_{\{|y|\geq\delta\}} |g(x) - g(x-y)|\, \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leq \\ &\int_\mathbb{R}\int_{\{|y|<\delta\}} |g(x) - g(x-y)|\, \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_\mathbb{R}\int_{\{|y|\geq\delta\}} |g(x)|\phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_\mathbb{R}\int_{\{|y|\geq\delta\}} |g(x-y)|\phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x =: \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 \ .\end{aligned}$$

Zauważmy, że w pierwszej całce wyrażenie $|g(x) - g(x-y)|$ jest równe zero gdy $x > 2R$ (bo wtedy $x > R$ oraz $|x-y| > 2R - |y| > R$, a więc zarówno x, jak też $x-y$ leżą poza nośnikiem g. Zatem, mamy

$$I_1 = \int_{\{|x|<2R\}}\int_{\{|y|<\delta\}} |g(x) - g(x-y)|\, \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leq \int_{\{|x|<2R\}}\int_{\{|y|<\delta\}} \varepsilon\ \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leq 4R\ \varepsilon \int_\mathbb{R} \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y = 4R\ \varepsilon \ .$$

Z kolei ponownie ograniczając całkowanie tylko do nośnika funkcji $g(x)$ dostajemy dla całki I_2:

$$I_2 = \int_{|x|<R}\int_{\{|y|\geq\delta\}} |g(x)|\phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leq \int_{|x|<R}\int_{\{|y|\geq\delta\}} M\phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2R\ M \int_{\{|y|\geq\delta\}} \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y \ .$$

Podobnie

$$I_3 = \int_{|x-y|<R}\int_{\{|y|\geq\delta\}} |g(x-y)|\phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leq 2R\ M \int_{\{|y|\geq\delta\}} \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y \ .$$

Ostatecznie

$$\|g - g * \phi_\lambda\|_{L^1} \leq I_1 + I_2 + I_3 \leq 4R \left(\varepsilon + M \int_{\{|y|\geq\delta\}} \phi_\lambda(y)\mathrm{d}y\right) \ .$$

Korzystając z dowolności ε oraz z faktu, że $\int_{\{|y|\geq\delta\}}\phi_\lambda(y)\mathrm{d}y = e^{-\delta\lambda} \stackrel{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mamy tezę.

Zadanie 2. Zdefiniujmy rodzinę funkcji $\phi_\lambda(x) := \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ dla $\lambda > 0$. Wykaż że dla dowolnej funkcji całkowalnej $f \in L^1(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\|\phi_\lambda * f - f\|_{L^1} = 0 \ .$$

Wskazówka: przybliż funkcję całkowalną funkcją ciągłą o zwartym nośniku.

Rozwiązanie: Udowodnijmy najpierw wskazówkę. Wybierzmy $\varepsilon > 0$. Z definicji, funkcję całkowalną $f \in L(\mathbb{R})$ możemy przybliżyć pewną funkcją schodkową $u = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{[a_i,b_i]}$ tak aby $\|f-u\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Z kolei każdą funkcję $u_i = c_i\chi_{[a_i,b_i]}$ łatwo przybliżymy funkcją ciągłą g_i o zwartym nośniku tak aby $\|u_i - g_i\| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Wówczas funkcja $g = \sum_{i=1}^n g_i$ jest ciągła, ma zwarty nośnik, oraz

$$\|f-g\| \leq \|f-u\|_{L^1} + \|u-g\|_{L^1} \leq \|f-u\| + \sum_{i=1}^n \|u_i - g_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \leq \varepsilon \ .$$

Z kolei z nierówności Younga dowodzonej na wykładzie, możemy oszacować że

$$\|g*\phi_\lambda - f*\phi_\lambda\|_{L_1} = \|(g-f)*\phi_\lambda\|_{L^1} \leq \|f-g\|_{L^1}\cdot\|\phi_\lambda\|_{L^1} = \|f-g\|_{L^1} \ .$$

Stąd już łatwo

$$\|f-f*\phi_\lambda\|_{L^1} \leq \|f-g\|_{L_1}+\|g-g*\phi_\lambda\|_{L_1}+\|g*\phi_\lambda-f*\phi_\lambda\|_{L^1} \leq 2\|f-g\|_{L_1}+\|g-g*\phi_\lambda\|_{L_1} \leq 2\varepsilon+\|g-g*\phi_\lambda\|_{L_1} \ .$$

Na mocy poprzedniego zadania mamy $\|g-g*\phi_\lambda\|_{L_1} \stackrel{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, skąd wobec dowolności ε wynika teza.

Wniosek. Funkcje gładkie (o zwartym nośniku) są gęste (w sensie normy $\|\cdot\|_{L^1}$) w funkcjach całkowalnych $L(\mathbb{R})$. To znaczy dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdej funkcji $f \in L(\mathbb{R})$ istnieje funkcja gładka $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ taka, że

$$\|f-h\|_{L^1} \leq \varepsilon \ .$$

Istotnie, z wyników poprzednich zadań wynika, że: jeśli $\phi_\lambda : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ jest rodziną funkcji całkowalnych takich, że $\int_\mathbb{R}\phi_\lambda(y)\mathrm{d}y = 1$ oraz $\int_{|y|>\delta}\phi_\lambda(y)\mathrm{d}y \stackrel{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, to wówczas

$$\|f - f*\phi_\lambda\|_{L_1} \stackrel{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

My zrobiliśmy to dla konkretnego $\phi_\lambda(y) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$, ale rozumowanie działa ogólnie. Z kolei z naszych poprzednich rozważań wynika, że splot funkcji całkowalnej z odpowiednio regularną funkcją różniczkowalną (r-krotnie) jest funkcją różniczkowalną (r-krotnie). Jeśli zatem poprawimy nieco funkcje ϕ_λ do rodziny funkcji gładkich (obecnie mamy nieróżniczkowalność w zerze) to okaże się, że sploty $f*\phi_\lambda$ są funkcjami gładkimi, skąd wynika teza.

Definicja. *Położeniem środka masy* (*ciężkości*) zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ o gęstości $\rho : A \to [0,+\infty)$ nazywamy wektor

$$\langle \boldsymbol{r}_\rho(A)\rangle = \frac{1}{M_\rho(A)}\int_A \boldsymbol{x}\cdot\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) \ ,$$

gdzie $M_\rho(A) := \int_A \rho(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x})$ jest masą zbioru A.

Zadanie 3. Znaleźć środek ciężkości półkuli $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + x^2 \leq 1, z > 0\}$.

`Zadanie domowe na 16 kwietnia 2020:`

Zadanie 4. Znaleźć środek ciężkości zbioru $\{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} < z < 1\}$.
