AM II.2 2019/20 (gr 3)

5. ćwiczenia zdalne – 2 kwietnia 2020.
Sploty, różniczkowanie pod znakiem całki

Załączam rozwiązanie, gdyby na ćwiczeniach było zbyt niejasne:

Zadanie 1. Rozważmy funkcję całkowalną $f \in L(\mathbb{R})$ i zdefiniujmy funkcję $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t-y)\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y \ .$$

Wykaż, że F jest:

a) dobrze określona,

b) ciągła (jednostajnie),

c) różniczkowalna.

Rozwiązanie: a) Ze znanej nierówności $\frac{|\sin y|}{|y|} < 1$ mamy

$$|F(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t-y)|\mathrm{d}y = \Big| x = t-y, \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \Big| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty \ ,$$

więc $F(t)$ jest skończona dla każdego $t \in \mathbb{R}$.
b) Policzmy $F(t) - F(s)$ mamy

$$|F(t)-F(s)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} f(t-y)\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} f(s-y)\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y \right| = \Big| \text{zamiana zmiennych } z = t-y \text{ i } z = s-y \Big| =$$
$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(z)\frac{\sin(t-z)}{t-z}\mathrm{d}z - \int_{\mathbb{R}} f(z)\frac{\sin(s-z)}{(s-z)}\mathrm{d}z \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(z)| \cdot \left| \frac{\sin(t-z)}{t-z} - \frac{\sin(s-z)}{s-z} \right| \mathrm{d}z$$

Teraz trzeba zauważyć, że $g(t) = \frac{\sin t}{t}$ jest jednostajnie ciągła, a więc dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje δ takie, że $|g(t') - g(s')| < \varepsilon$ o ile $|t' - s'| < \delta$. Biorąc $|t-s| < \delta$ mamy więc $\left| \frac{\sin(t-z)}{t-z} - \frac{\sin(s-z)}{s-z} \right| < \varepsilon$ dla $|t-s| < \delta$, skąd otrzymujemy

$$|F(t)-F(s)| < \int_{\mathbb{R}} |f(z)|\varepsilon \mathrm{d}z = \varepsilon \cdot \|f\|_1 \ .$$

Czyli pokazaliśmy jednostajną ciągłość.
c) Na koniec spróbujmy zastosować tw. o różniczkowaniu pod znakiem całki do badanej funkcji w postaci $F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{\sin(t-y)}{t-y}\mathrm{d}y$. Mamy

$$\frac{\partial}{\partial t} f(y)\frac{\sin(t-y)}{t-y} = f(y)\frac{\cos(t-y)(t-y) - \sin(t-y)}{(t-y)^2} = f(y) \cdot h(t-y) \ ,$$

gdzie $h(s) = \frac{\cos(s)s - \sin(s)}{s^2}$. Zauważmy, że jest to funkcja ograniczona (i jednostajnie ciągła), wobec czego możemy ograniczyć pochodną przez funkcję całkowalną $M \cdot f(y)$, wobec czego działa tw. o różniczkowaniu pod znakiem całki oraz

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)h(t-y)\mathrm{d}y \ .$$

Ponadto z jednostajnej ciągłości $h(\cdot)$ można pokazać, że rozważana pochodna też jest jednostajnie ciągła.

Definicja. Rozważmy funkcje całkowalne $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Splotem funkcji f i g nazywamy funkcję $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n(\boldsymbol{y}) \ .$$

Uwaga! Splot $f * g$ może być dobrze określoną funkcją również gdy na przykład tylko jedna z rozważanych funkcji będzie całkowalna. Tak było w poprzednim zadaniu, bo funkcja $\frac{\sin x}{x}$ nie jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$.

Przy okazji poprzedniego zadania na konkretnym przykładzie udowodniliśmy następujące dwa fakty (dowód ogólny nie różni się zasadniczo od naszego zadania).

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli $f \in L(\mathbb{R}^n)$, zaś $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą i ograniczoną, to splot $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą i ograniczoną.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli $f \in L(\mathbb{R}^n)$, zaś $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, ograniczoną i różniczkowalną, i taką że jej pochodna $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ jest ograniczona, to splot $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną po i-tej zmiennej i ponadto

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(f * g)(\boldsymbol{t}) = \left(f * \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)(\boldsymbol{t}).$$

Powyższe zadania obrazują dość dobrze użyteczność splotu: jeśli splatamy funkcję całkowalną f z funkcją g o pewnych specjalnych własnościach (np. ciągłość jednostajna, różniczkowalność, gładkość, itp.) To możemy oczekiwać że splot $f * g$ odziedziczy niektóre z tych własności po funkcji g. Podobnego typu przykład widzieli Państwo na wykładzie:

Twierdzenie. *Jeśli $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są funkcjami całkowalnymi to ich splot $f * g$ również jest funkcją całkowalną i ponadto zachodzi następująca nierówność Younga*

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L_1} \ .$$

Zadanie 4. Zdefiniujmy rodzinę funkcji $\phi_\lambda(x) := \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$ dla $\lambda > 0$. Naszkicuj wykres funkcji ϕ_λ dla kilku wybranych wartości parametru. Zbadaj zachowanie się funkcji przy $\lambda \to +\infty$ i oblicz $\int_{\mathbb{R}} \phi_\lambda(x) \mathrm{d}x$.

`Zadania domowe na 7 kwietnia 2020:`

Zadanie 5. Rozważmy funkcje całkowalne $f, g, h \in L(\mathbb{R}^n)$ wykaż, że operacja splotu jest łączna, tzn.

$$(f * g) * h = f * (g * h) \ .$$

Wskazówka: Wykorzystaj odpowiednią zamianę zmiennych.

Zadanie 6. (trudniejsze) Zdefiniujmy rodzinę funkcji $\phi_\lambda(x) := \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ dla $\lambda > 0$. Niech $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o nośniku zawartym w pewnej kuli $B(0, R)$. Wykaż, że

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|\phi_\lambda * g - g\|_{L^1} = 0 \ .$$

Wskazówka: wykorzystaj fakt, że $\int_{\mathbb{R}} \phi_\lambda(x)\mathrm{d}x = 1$.

`Zadanie pisemne na pierwsze ćwiczenia po świętach:`

Zadanie 7. Rozważmy funkcję całkowalną $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Dla $t \geq 0$ definiujemy

$$F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(tx)f(x)\mathrm{d}x \ .$$

Rozstrzygnij, czy

a) F jest ciągła na $[0, +\infty)$?

b) F jest różniczkowalna na $(0, +\infty)$?

c) F jest całkowalna na $[0, +\infty)$?
