AM II.2 2019/20 (gr 3)

4. ćwiczenia zdalne – 26 marca 2020.
Różniczkowanie pod znakiem całki.

Zadanie 1. Udowodnij następujące uogólnienie twierdzenia Tonelli'ego. Niech $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną, taką że $f \geq \phi_0$ dla pewnej funkcji całkowalnej $\phi_0 \in L(\mathbb{R}^n)$. Wówczas jeśli całka iterowana

$$\int_{R^k} \left[\int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^s \boldsymbol{y} \right] \mathrm{d}^k \boldsymbol{x}$$

jest skończona to f jest całkowlana na $\mathbb{R}^n$ (i zachodzi teza tw. Fubini'ego, a więc rozważana całka jest równa $\int_{\mathbb{R}^n} f$.)

Twierdzenie (Różniczkowanie pod znakiem całki). *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym, $I \subset \mathbb{R}$ otwartym podzbiorem prostej $\mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcja $f : I \times A \to \mathbb{R}$ ma następujące własności:*

- *Dla każdego $t \in I$ funkcja $f(t, \cdot) : A \to \mathbb{R}$ jest całkowalna*
- *Funkcja $f(t, \boldsymbol{x})$ jest różniczkowalna względem zmiennej t.*
- *Istnieje funkcja całkowalna $g : A \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $t \in I$ zachodzi $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t, \boldsymbol{x})\right| \leq g(x)$.*

Wówczas możemy różniczkować f pod znakiem całki, tzn.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\int_A f(t, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) \right] = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(t, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) \ .$$

Zadanie 2. Udowodnij twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki.

Zadanie 3. Oblicz całkę przy warunku $a > b > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \mathrm{d}x \ .$$

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję $f(t, x) = \frac{e^{-tx} - e^{-bx}}{x}$ określoną dla $t \geq b$ i niech $F(t) = \int_0^{+\infty} f(t, x) \mathrm{d}x$. Funkcja f ta jest całkowalna na $\mathbb{R}_+$ przy ustalonym t – blisko 0 zachowuje się jak funkcja stała, a w nieskończoności jak coś mniejszego niż e^{-bx}. Ponadto $\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = -e^{-tx}$, co jest co do modułu mniejsze niż funkcja całkowalna e^{-bx}. Spełnione są zatem założenia tw. o różniczkowaniu pod znakiem całki i mamy

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} -e^{-tx} \mathrm{d}x = \frac{1}{t} e^{-tx} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{t} \ .$$

Wobec tego

$$F(a) = F(b) + \int_b^a F'(t) \mathrm{d}t = 0 + \int_b^a \frac{-1}{t} \mathrm{d}t = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ .$$

Inny sposób: wziąć $f(t, x) = \frac{e^{-tx}}{x}$, ale całkować na skończonym przedziale $[0, N]$, obliczyć całkę $\int_0^N f(a, x) - f(b, x) \mathrm{d}x$ i przejść z N do nieskończoności.

Jeszcze inny sposób: z twierdzenia Fubini'ego dla funkcji e^{-tx} – dodatniej i mierzalnej.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b e^{-tx}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \stackrel{\text{Fub.}}{=} \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{b}{a}\right) .$$

`Zadania domowe na 2 kwietnia 2020:`

Zadanie 4. Oblicz całkę

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot\frac{1-\cos tx}{x}\mathrm{d}x .$$

Wskazówka: Oblicz pochodną po parametrze t.

`Zadanie pisemne na 2 kwietnia 2020:`

Zadanie 5. Rozstrzygnij dla jakich $\alpha\in\mathbb{R}$ funkcja $f(x,y,z)=\frac{xyz}{\|(x,y,z)\|^\alpha}$ jest całkowalna na kuli jednostkowej $B^3(\mathbf{0},1)$? Jak wygląda odpowiedź gdy rozważymy całkowanie po dopełnieniu kuli $\mathbb{R}^3\setminus B^3(\mathbf{0},1)$?
