AM II.2 2019/20 (gr 3)

3. ćwiczenia zdalne – 24 marca 2020.
Całkowalność i mierzalność.

Omówienie zadań domowych.

Dzisiaj naszym bohaterem był następujący wniosek z twierdzeń Fubini'ego i Tonelli'ego:

Wniosek. Niech $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną i nieujemną. Wówczas f jest całkowalna na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ wtedy i tylko wtedy gdy całka iterowana

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^k \boldsymbol{y} \right] \mathrm{d}^n \boldsymbol{x}$$

jest skończona. Ponadto jeśli $I < +\infty$ to $I = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f$.

Uzasadnienie: jeśli rozważana całka jest skończona to, na mocy tw. Tonelli'ego, f jest całkowalna i wówczas z twierdzenia Fubini'ego $I = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f$.
Z drugiej strony, załóżmy że $I = +\infty$, ale f jest całkowalna na $\mathbb{R}^{n+k}$. Ale wówczas spełnione są założenia tw. Fubini'ego i całka z f jest równa całce iterowanej $I = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f < +\infty$. Sprzeczność, a więc f nie może być całkowalna.

Zadanie 1. Rozstrzygnij czy funkcja $f(x,y) = \frac{\ln x + \ln y}{1+x^2+y^2}$ jest całkowalna na zbiorach:

a) $A = [0,1]^2$,

b) $B = [0,1] \times [1,+\infty)$,

c) $C = [1,+\infty)^2$?

`Zadania domowe na 26 marca:`

Zadanie 2. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < 1, y > 0\}$. Oblicz całkę

$$\int_A x \exp(-y^2)\ \mathrm{d}^2(x,y)\ .$$

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_{\{x>0,y>0\}} \frac{xy-1}{y} \exp[-x-2y]\ \mathrm{d}^2(x,y)\ .$$
