AM II.2 2019/20 (gr 3)

2. ćwiczenia zdalne – 19 marca 2020.
Całkowalność i mierzalność – propozycje zadań

Na wykładzie pojawiła się ostatnio definicja funkcji mierzalnej

Definicja. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest *mierzalna*, gdy istnieje ciąg funkcji schodkowych $u_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taki, że

$$f(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\boldsymbol{x}) \quad \text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Będziemy oznaczali $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Uwaga! Nie zakładamy, że ma to być ciąg monotoniczny, ani że całki funkcji u_n są wspólnie ograniczone, jak w definicji klasy $S^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$, czy $L(\mathbb{R}^n)$.

W szczególności mierzalne są wszystkie funkcje:

- *całkowalne w sensie Lebesgue'a (jako granice różnic monotonicznych ciągów funkcji schodkowych).*
- *całkowalne w sensie Riemanna (jako szczególny przypadek poprzedniego).*
- *wszystkie funkcje ciągłe (przybliżenia schodkowe możemy skonstruować tak jak w całce Riemanna).*
- *wprost z definicji wynika, że jeśli $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ a $g = f$ p.w. to również g jest mierzalna.*

Zadanie 1. Uzasadnij, że jeśli $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ to również funkcje $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ są mierzalne.

Z pojęciem mierzalności funkcji wiąże się pojęcie mierzalności zbioru.

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *mierzalnym* gdy funkcja charakterystyczna χ_A jest funkcją mierzalną.

Klasa zbiorów mierzalnych w $\mathbb{R}^n$ zawiera zbiory otwarte, zbiory domknięte, wszystkie zbiory typu F_σ oraz G_δ i ogólniej wszystkie zbiory borelowskie $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, a ponadto $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ – wszystkie zbiory miary Lebesgue'a zero. Dowodzi się, że klasa zbiorów mierzalnych jest najmniejszym σ-pierścieniem (używa się też nazwy σ-ciało) zawierającym wszystkie zbiory borelowskie i wszystkie zbiory miary zero. Mówiąc inaczej, dla każdego zbioru mierzalnego $A \subset \mathbb{R}^n$ istnieje zbiór borelowski $\widehat{A}$ (tak naprawdę wystarczy zbiór typu F_σ albo typu G_δ), że różnica symetryczna $A \div \widehat{A}$ jest zbiorem miary zero.

Pojęcie zbioru mierzalnego jest ważne gdyż pozwala, po pierwsze wyróżnić klasę zbiorów którym można przypisać sensowną miarę Lebesgue'a (równą $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A = \int_A 1$ gdy χ_A jest całkowalna, lub $+\infty$, w przeciwnym przypadku). Drugi powód jest następujący

Stwierdzenie. *Rozważmy funkcję mierzalną $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i zbiór mierzalny $A \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas obcięcie $f|_A$ jest funkcją mierzalną.*

W szczególności dotyczy to sytuacji spotykanej najczęściej na ćwiczeniach: rozpatrujemy funkcję ciągłą na zbiorze mierzalnym (typowo borelowskim).

Zadanie 2. Uzasadnij, że obcięcie funkcji mierzalnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ do zbioru mierzalnego $A \subset \mathbb{R}^n$ jest funkcją mierzalną.

Mierzalność a całkowalność funkcji
Mamy zawieranie $L(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, oraz $L_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ale klasa funkcji mierzalnych jest znacznie większa niż klasa funkcji (lokalnie) całkowalnych – przykładowo każda funkcja ciągła jest mierzalna, ale nie każda jest całkowalna. Mamy kilka sposobów, aby sprawdzić czy dana funkcja mierzalna jest całkowalna.

a) Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną. Jeśli istnieje funkcja całkowalna $\Phi_0 \in L(\mathbb{R}^n)$ taka, że $|f| \le \Phi_0$ to również f jest funkcją całkowalną.

b) Niech $f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną, za $\Phi : \Phi^{-1}(A) \to A$ będzie dyfeomorfizmem (zamianą zmiennych). Wówczas funkcja f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy funkcja $f(\Phi) \cdot |J_\phi| : \Phi^{-1}(A) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna. Innymi słowy całkowalność funkcji możemy sprawdzić

c) Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieujemną, całkowalną w sensie Riemanna na każdym zbiorze zwartym (wynika stąd mierzalność f) wówczas f jest całkowalna, wtedy i tylko wtedy gdy całka niewłaściwa Riemanna $\oint_{\mathbb{R}^n} f$ jest skończona. Co więcej obie całki pokrywają się $\oint_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

*d) **Tw. Tonelli'ego**. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną i nieujemną. Załóżmy, że w pewnym rozkładzie $R^n = R^k \times \mathbb{R}^s \ni (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ całka iterowana*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^s} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}^s \boldsymbol{y} \right] \mathrm{d}^k \boldsymbol{x}$$

jest skończona. Wówczas f jest całkowalna (i oczywiście zachodzi tw. Fubini'ego, a wiec policzona całka iterowana jest równa całce podwójnej $\int_{\mathbb{R}^n} f < +\infty$.)

e) Przypomnijmy też sobie, że funkcja f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy jej moduł $|f|$ jest całkowalny. Wobec tego zazwyczaj warto od razu zastanawiać nad całkowalnością modułu. Wówczas możemy bez zastrzeżeń stosować metody z dwóch poprzednich punktów.

Zauważmy, że w dwóch przedostatnich przypadkach mamy do czynienia z funkcjami nieujemnymi!. Możemy myśleć tak: dla funkcji mierzalnych nieujemnych całkowalność możemy sprawdzić licząc całkę niewłaściwą Riemanna, bądź całkę iterowaną jak w twierdzeniu Fubini'ego. Wynik skończony oznacza całkowalność w sensie Lebesgue'a.

Zadanie 3. Rozstrzygnij dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $\|\boldsymbol{x}\|^\alpha$ jest całkowalna na kuli jednostkowej $B^n(\mathbf{0}, 1)$? Jeśli ogólny przypadek jest za trudny, rozważ przypadki $n = 1, 2, 3$.

Zadanie 4. Rozstrzygnij czy funkcja $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\|(x,y)\|^4}$ jest całkowalna na kwadracie $[0, 1]^2$?

Rozwiązanie: Obetnijmy funkcję f do zbioru $A := [0, 1]^2 \cap B^2(\mathbf{0}, 1)$ – dzięki temu łatwiej się nam będzie liczyło po zamianie na współrzędne biegunowe.

Dlaczego to nie wpływa na całkowalność? Zbiór A, jak również i jego dopełnienie $A' := [0, 1]^2 \setminus A$ są borelowskie, a więc mierzalne. Funkcja f jest ciągła, a zatem jest mierzalna zarówno na A jak i na dopełnieniu A'. Łatwo zauważyć, że na A' mamy ograniczenie $|f| \le 1$, a ponieważ funkcja stale równa 1 jest całkowalna na zbiorze mierzalnym ograniczonym A' (por. definicja mierzalności zbiorów na wykładzie), to obcięcie $f \cdot \chi_{A'}$ jest całkowalne. Ponieważ suma funkcji całkowalnych jest całkowalna oraz $f \cdot \chi_{[0,1]^2} = f \cdot \chi_A + f \cdot \chi_{A'}$, zatem f jest całkowalne na $[0, 1]^2$ wtedy i tylko wtedy gdy jest całkowalne na A.

Z kolei po zamianie zmiennych na współrzędne biegunowe staje przed nami kwestia całkowalności funkcji $\frac{r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)}{r^4} \cdot r = \frac{\cos(2\phi)}{r}$ na zbiorze $(r, \phi) \in [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Liczenie całki iterowanej (co jest podejrzane bo nie wiemy czy f jest całkowalna – co jest potrzebne do tw. Fubini'ego, ani też f nie jest funkcją nieujemną jak w założeniach tw. Tonelli'ego) daje nam wartość tej całki równą $0 \cdot (+\infty)$, co nie mówi nam zbyt wiele. Aby poradzić sobie z tym problemem zbadajmy całkowalność modułu (co: 1. jest równoważne całkowalności samej funkcji, 2. pozwala stosować tw. Tonelli'ego). Wynikiem całkowania jest

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{|\cos(2\phi)|}{r} \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \ln r\Big|_0^1 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(2\phi)|\mathrm{d}\phi = +\infty \ .$$

Wartość całki jest nieskończona, zatem funkcja nie jest całkowalna.

Inny sposób to zauważyć, że ta funkcja f nie jest całkowalna na mniejszym zbiorze $[0,1]\times[0,\frac{\pi}{4}]$. Dlaczego to kończy sprawę? Niech $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami mierzalnymi, jeśli f jest całkowalna na A to też na mniejszym zbiorze B. Gdyż $f \cdot \chi_B$ jest mierzalna jako iloczyn funkcji mierzalnych, oraz $|f|\cdot\chi_B \le |f|\cdot\chi_A$, co jest funkcją całkowalną.

`Zadania domowe na 24 marca 2020:`

Zadanie 5. Rozstrzygnij dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $\|\boldsymbol{x}\|^\alpha$ jest całkowalna na kuli jednostkowej $B^3(\mathbf{0}, 1)$?.

Zadanie 6. Rozstrzygnij dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $(1 - \|\boldsymbol{x}\|)^\alpha$ jest całkowalna na kuli jednostkowej $B^n(\mathbf{0}, 1)$? Wystarczy rozważyć przypadki $n = 1, 2, 3$.

Zadanie 7. Rozstrzygnij czy funkcja $f(x, y) = \frac{\ln x + \ln y}{1 + x^2 + y^2}$ jest całkowalna na zbiorach:

a) $A = [0, 1]^2$,

b) $B = [0, 1] \times [1, +\infty)$,
