AM II.2 2019/20 (gr 3)

1. ćwiczenia zdalne – 12 marca 2020. Rozwiazania

Zadanie 1. Oblicz całkę

$$\int_{\{|x-y|<1\}} \exp(-|x+y|)\mathrm{d}\lambda^2(x,y) \ .$$

Rozwiązanie: Sposób 1 (sprytny). Dokonajmy podstawienia $z = x - y$ i $t = x + y$ – takie podstawienie jest naturalne w świetle treści zadania – upraszcza i funkcję i zbiór po którym całkujemy. Odpowiada to $x = \frac{z+t}{2}$ oraz $y = \frac{t-z}{2}$. Mamy zatem do czynienia z zamianą zmiennych $\phi(z,t) = (x = \frac{z+t}{2}, y = \frac{t-z}{2})$. Jest to przekształcenie liniowe o jakobianie $\frac{1}{2}$. Stosując powyższą zamianę zmiennych dostajemy

$$I = \int_{|z|<1} \exp(-|t|) \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}^2(z,t) \overset{\text{Fub.}}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ 2\ 2\int_0^{+\infty} \exp(-t)\mathrm{d}t = 2 \ .$$

Twierdzenie Fubini'ego można stosować, bo mamy do czynienia z funkcją mierzalną (ciągłą) nieujemną.

Sposób 2 (bez zamiany zmiennych). Mamy $|x - y| < 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $-1 + y < x < 1 + y$. Korzystając z symetrii mamy

$$I = 2\int_A e^{-(x+y)}\mathrm{d}^2(x,t) \ , \quad \text{gdzie } A = \{(x,y) \mid x + y > 0, -1 + y < x < 1 + y\}.$$

Mamy dwa oszacowania dolne $x > -y$ i $x > -1 + y$. Dla $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mocniejsze jest to pierwsze, a dla $y > \frac{1}{2}$ to drugie. Stąd wnioskujemy, że $I = 2I_1 + 2I_2$, gdzie

$$I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \left[e^{-y}\int_{-y}^{y+1} e^{-x}\mathrm{d}x\right] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-y}\left(e^{y} - e^{-y-1}\right)\mathrm{d}y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 - e^{-2y-1}\mathrm{d}y =$$

$$y\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^{-2y-1}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(e^{-2} - 1) = 1 + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2} \ ,$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \mathrm{d}y \left[e^{-y}\int_{y-1}^{y+1} e^{-x}\mathrm{d}x\right] = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-y}(e^{-y+1} - e^{-y-1})\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} (e^{-2y+1} - e^{-2y-1})\mathrm{d}y =$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2y+1}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty} + \frac{1}{2}e^{-2y-1}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty} = -\frac{1}{2}(0-1) + \frac{1}{2}(0 - \frac{1}{e^2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} \ .$$

Stąd $I = 2I_1 + 2I_2 = 2$.

Zadanie 2. Oblicz miarę zbioru

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y, \frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2, 1 \leq xy \leq 2\} \ .$$

Rozwiązanie: Sposób 1. (zamiana zmiennych) Podstawmy $z = \frac{x}{y}$ i $t = xy$. Odpowiada to zamianie zmiennych $\Phi(z,t) = \left(x = \sqrt{zt}, y = \sqrt{\frac{t}{z}}\right)$, której Jakobian wynosi $\frac{1}{2z}$. Z twierdzenia o zamianie zmiennych mamy

$$l_2(A) = \int_A 1 \, \mathrm{d}^2(x,y) = \int_{\Phi^{-1}(A)} 1 \cdot \frac{1}{2z} \, \mathrm{d}^2(z,t) = \int_{[\frac{1}{2},2]\times[1,2]} \frac{1}{2z} \mathrm{d}^2(z,t) \overset{\text{Fub.}}{=}$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2z} \left[\int_1^2 \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}z = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2z} \cdot 1\mathrm{d}z = \frac{1}{2} \ln z \Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln \frac{1}{2}) = \ln 2 \ .$$

Sposób 2. (brutforce) Będziemy używali twierdzenia Fubini'ego całkując najpierw po y, a potem po x. Punkty zbioru A spełniają 2 pary nierówności $\frac{x}{2} < y < 2x$ i $\frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}$. Zauważmy, że nierówności te są sprzeczne gdy $\frac{x}{2} > \frac{2}{x}$, a więc gdy $x > 2$ i gdy $2x < \frac{1}{x}$, a więc gdy $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wynika stąd, że x będziemy całkowali na przedziale $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2]$.
Ponadto w twierdzeniu Fubini'ego będziemy całkować y w przedziale $\max\{\frac{x}{2}, \frac{1}{x}\} < y < \min\{2x, \frac{2}{x}\}$. Łatwo zauważyć, że dla $x > 0$

$$\max\left\{\frac{x}{2}, \frac{1}{x}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{gdy } x < \sqrt{2} \\ \frac{x}{2} & \text{gdy } x > \sqrt{2} \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad \min\left\{2x, \frac{2}{x}\right\} = \begin{cases} 2x & \text{gdy } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{gdy } x > 1 \ . \end{cases}$$

Wobec tego mamy $\frac{1}{x} < y < 2x$ gdy $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$; $\frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}$ gdy $x \in [1, \sqrt{2}]$ oraz $\frac{x}{2} < y < \frac{2}{x}$ gdy $x \in [\sqrt{2}, 2]$. Te przedziały dobrze widać z rysunku zbioru A, który warto wykonać. Stąd

$$\int_A 1\mathrm{d}^2(x,y) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\frac{1}{x}}^{2x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x =$$
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(2x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = \ldots = \ln 2 \ .$$

Zadanie 3. (Funkcja Γ i jej własności.) Funkcję Γ definiujemy wzorem

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} \mathrm{d}t \ .$$

Pokaż, że

(a) $\Gamma(1) = 1$,

(b) $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a)$,

(c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Rozwiązanie: Punkt (a) to proste całkowanie. Punktu (b) dowodzimy całkując przez części

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^a e^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^\infty t^a \left(-e^{-t}\right)' \mathrm{d}t \overset{\text{części}}{=} t^a \left(-e^{-t}\right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (t^a)' \left(-e^{-t}\right) \mathrm{d}t =$$
$$0 + a \cdot \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} \mathrm{d}t = a \cdot \Gamma(a) \ .$$

Z kolei punktu (c) dowodzimy przez zamianę zmiennych sprowadzającą problem do całki $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$, której wartość powinniśmy znać z wykładu:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t = \left| t = x^2,\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x = 2\sqrt{t}\mathrm{d}x \right| = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\ .$$

Zadanie 4. Wykaż, że

$$\lambda_{2,p} = \frac{4}{p} \cdot \int_0^1 t^{\frac{1}{p}-1}(1-t)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}t\ .$$

Rozwiązanie: Policzymy miarę zbioru $A_{2,p}^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0,\ x^p + y^p \leq 1\}$. Łatwo zauważyć że jest to $\frac{1}{4}$ liczby $\lambda_{2,p}$. Zastosujemy w tym celu twierdzenie Fubini'ego:

$$\frac{1}{4}\lambda_{2,p} \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 \left[\int_{\{x\geq 0\ \mid\ x^p<1-y^p\}} 1\ \mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \int_0^1 (1-y^p)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y = \left| z = y^p,\ \mathrm{d}z = py^{p-1}\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}y = \frac{1}{p}z^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}z \right| =$$
$$\frac{1}{p} \cdot \int_0^1 z^{\frac{1}{p}-1}(1-z)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}z\ .$$

Zadanie 5. (Funkcja beta) Dla liczb rzeczywistych a i b zdefiniujmy funkcję $B(a,b)$ wzorem

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t\ .$$

Wykaż, że zachodzi następująca tożsamość

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\ .$$

Wskazówka: *Policz całkę z funkcji $f(t,s) = t^{a-1}\cdot e^{-t}\cdot s^{b-1}\cdot e^{-s}$ po zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \ni (t,s)$ dwoma sposobami – za pomocą twierdzenia Fubini'ego i za pomocą pewnej zamiany zmiennych (Uwaga: wymyślenie właściwej zamiany zmiennych nie jest zupełnie trywialne – niecierpliwi mogą zajrzeć do podpowiedzi.)*

Rozwiązanie: Z jednej strony mamy

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} f(t,s)\mathrm{d}^2(t,s) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^\infty \left[t^{a-1}\cdot e^{-t}\int_0^\infty s^{b-1}e^{-s}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{a-1}\cdot e^{-t}\cdot\Gamma(b)\ \mathrm{d}t = \Gamma(a)\cdot\Gamma(b)\ .$$

Twierdzenie Fubini'ego mogliśmy stosować bo całkujemy funkcję ciągłą i nieujemną. Zastosujmy teraz do badanej całki podstawienie $t+s = w$, $t = z\cdot w$. Ponieważ zawsze $0 < t = z\ w < t+s = w$ mamy $z \in (0,1)$ oraz $t+s = w \in (0,\infty)$. Zauważmy, że takie podstawienie odpowiada zamianie zmiennych

$\Phi(w,z) = (t = z\ w, s = w - z\ w)$, której jakobian wynosi w (prosty rachunek). Zatem na mocy twierdzenia o zamianie zmiennych w całce mamy:

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} f(t,s)\mathrm{d}^2(t,s) = \int_{\mathbb{R}_+\times(0,1)} f(\Phi(w,z))\cdot w\ \mathrm{d}^2(w,z) = \int_{\mathbb{R}_+\times(0,1)} (wz)^{a-1}\cdot(w-zw)^{b-1}e^{-w}\cdot w\ \mathrm{d}^2(w,z) =$$

$$\int_{\mathbb{R}_+\times(0,1)} w^{a+b-1}e^{-w}z^{a-1}(1-z)^{b-1}\ \mathrm{d}^2(w,z) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^\infty w^{a+b-1}e^{-w}\mathrm{d}w\cdot\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\mathrm{d}z =$$

$$\Gamma(a+b)\cdot B(a,b)\ .$$