AM II.2 2019/20 (gr 3)

19. ćwiczenia zdalne (dodatkowe) – 8 czerwca 2020. Całka z formy po rozmaitości zorientowanej. Tw Stokes'a.

Zadanie 1. Oblicz pole wnętrza elipsy

$$E = \{(a\ \cos\phi, b\ \sin\phi) \mid \phi \in (0, 2\pi)\}\ .$$

Rozwiązanie: Zbiór E jest brzegiem zbioru S, którego pole chcemy policzyć Korzystając z twierdzenia Stokes'a policzymy

$$\int_{E=\partial S} x\mathrm{d}y = \int_S \mathrm{d}(x\mathrm{d}y) = \int_S \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \overset{(*)}{=} \int_S \mathrm{d}^2(x,y) = \lambda_2(S)\ ,$$

przy czym aby zachodziła równość $(*)$ musimy przyjąć standardową orientację $\mathbb{R}^2$, czyli $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$, co z kolei oznacza, że elipsa E powinna być zorientowana przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (a więc zgodnie z rosnącym kątem ϕ). Ostatecznie mamy

$$\lambda_2(S) = \int_E x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} a\ \cos\phi \mathrm{d}\ \ (b\ \sin\phi) = \int_0^2 \pi ab\ \cos^2\phi\ \mathrm{d}\phi = \pi ab\ .$$

Zadanie 2. Oblicz pole obszaru w $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ograniczonego krzywą $(x+y)^4 = x^2 y$. *Wskazówka*: rozważ punkty przecięcia badanej krzywej z prostymi $y = tx$.

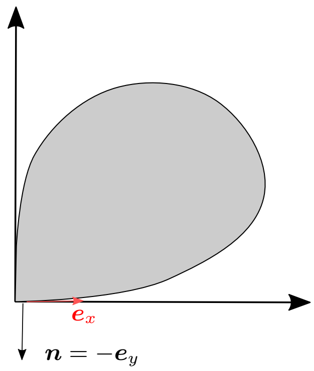
Rozwiązanie: Korzystając ze wskazówki podstawmy $y = tx$ do równania krzywej. Dostajemy $(x+tx)^4 = x^2\ tx$ skąd $x^4(1+t)^4 = t\ x^3$, a zatem $x = \frac{t}{(1+t)^4}$. Ponieważ, $y = tx$ otrzymujemy parametryzację rozważanej krzywej:

$$\Phi : t \longmapsto \left(\frac{t}{(1+t)^4}, \frac{t^2}{(1+t)^4}\right)\ ,$$

przy czym parametr t to współczynnik kierunkowy dowolnej prostej przechodzącej przez pierwszą ćwiartkę płaszczyzny, a więc $t \in [0, +\infty)$. Policzmy teraz całkę z formy $\omega = -y\mathrm{d}x$ po rozważanej krzywej.

$$\int_\gamma \omega = \int_{[0,+\infty} \Phi^*\omega = -\int_{[0,+\infty)} \frac{t^2}{(1+t)^4} \mathrm{d}\left(\frac{t}{(1+t)^4}\right) = -\int_{[0,+\infty)} \frac{t^2}{(1+t)^4}\left(\frac{1}{(1+t)^4} - \frac{t}{4(1+t)^5}\right)\mathrm{d}t \overset{(*)}{=}$$
$$-\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t)^4}\left(\frac{1}{(1+t)^4} - \frac{t}{4(1+t)^5}\right)\mathrm{d}t = \Big|s = 1+t\Big| = -\int_1^{+\infty} \frac{(s-1)^2}{s^4}\left(\frac{1}{s^4} - \frac{(s-1)}{4s^5}\right)\mathrm{d}s =$$
$$\ldots = \frac{1}{210}\ .$$

Na mocy twierdzenia Stokes'a $\int_\gamma \omega$ jest równa całce $\int_S \mathrm{d}\omega = \int_S \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \lambda_2(S)$, gdzie S jest figurą ograniczoną przez krzywą γ, a więc tym o co pytają w treści zadania.



Na koniec przyjrzyjmy się jeszcze kwestii orientacji. Zaczynając od końca aby $\int_S \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \lambda_2(S)$, na S powinniśmy przyjąć standardową orientację w $\mathbb{R}^2$, a więc $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$. Oznacza to, że krzywą γ powinniśmy zorientować zgodnie z tą orientacją a więc przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (jak w poprzednim zadaniu). Powinniśmy zastanowić się, czy całka $\int_\gamma \omega$, którą policzyliśmy wyżej była obliczona zgodnie z taką orientacją. Zauważmy, że licząc tę całkę dokonaliśmy automatycznie pewnego wyboru orientacji (przejście oznaczone jako $(*)$) umawiając się, że półprosta $[0, +\infty) \ni t$ jest zorientowana w kierunku rosnącego t. Indukowaną orientację na krzywej możemy łatwo sprawdzić licząc pochodną $\mathrm{d}\Phi\Big|_0[\boldsymbol{e}_t] = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t}\Big|_0 = [1, 0] = \boldsymbol{e}_x$. Jak widać, ponieważ wektrem normalnym zewnętrznym w punkcie $\Phi(0)$ jest $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_y$ – patrz rysunek, zaś para $(\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_x)$ jest dodatnio zorientowana, to wybrana orientacja w dziedzinie parametryzacji jest właściwa. (Inny argument jest zdroworozsądkowy: skoro liczymy pole, a wynik wyszedł nam dodatni, to orientacja była dobrana właściwie.)

Zadanie 3. Oblicz całkę z formy $\omega = x\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y \sin z\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (z+1)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ po rozmaitości M zdefiniowanej jako część powierzchni $x^2 + y^2 = \cos^2 z$ zawartej pomiędzy płaszczyznami $z = 0$ i $z = \frac{\pi}{4}$ z orientacją wyznaczoną przez bazę $\{\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_x\}$ w punkcie $(0, 1, 0) \in M$.

Rozwiązanie: Sposób 1 (z definicji całki z 2 formy). Będziemy całkowali po zbiorze $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \cos^2 z, z \in (0, \frac{\pi}{4})\}$, który łatwo sparametryzować:

$$\Phi : (\phi, z) \longmapsto (x = \cos z\ \cos\phi, y = \cos z\ \sin\phi, z)\ ,$$

gdzie $(\phi, z) \in U = [0, 2\pi] \times [0, \pi/4]$. Policzmy pullback

$$\Phi^*\omega = \cos z\ \cos\phi\ \mathrm{d}(\cos z\ \sin\phi) \wedge \mathrm{d}z + \cos z\ \sin\phi\ \sin z\ \mathrm{d}z \wedge (\cos z\ \cos\phi) + (z+1)\mathrm{d}(\cos z\ \cos\phi) \wedge (\cos z\ \sin\phi) = \ldots =$$
$$\left[\cos z\ ((1 + z + \cos z)\sin z \sin^2\phi + (\cos z + \cos^2\phi(1+z)\sin z))\right] \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}z\ .$$

Policzmy całkę z tej formy przyjmując że orientacja na U jest dana przez $(\boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z)$:

$$\int_U \Phi^*\omega = \int_U \left[\cos z\ ((1 + z + \cos z)\sin z \sin^2\phi + (\cos z + \cos^2\phi(1+z)\sin z))\right] \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z =$$
$$\pi \int_0^{\pi/4} \left[\cos z\ ((1 + z + \cos z)\sin z + (\cos z + (1+z)\sin z))\right] \mathrm{d}z = \ldots = \frac{1}{24}\pi(32 - 2\sqrt{2} + 3\pi)$$

Sposób 1 (z twierdzenia Stokesa). *Uzupełnić*