AM II.2 2019/20 (gr 3)

18. ćwiczenia zdalne – 4 czerwca 2020. Całka z formy po rozmaitości zorientowanej. Tw Stokes'a.

Zadanie 1. Używając podstawienia walcowego:

$$\Phi : (\phi, z) \longmapsto (x = \sqrt{a^2 - z^2}\cos\phi, y = \sqrt{a^2 - z^2}\sin\phi, z = z)$$

oblicz całkę z formy $\omega = x\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ po wycinku sfery $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > \frac{a}{2}\}$. Orientację A przyjmujemy tak jak na ćwiczeniach. Zakładamy, że $a > 0$.

Rozwiązanie: Policzmy na początek pullback $\Phi^*\omega$.

$$\begin{aligned}\Phi^*\omega =& \sqrt{a^2 - z^2}\cos\phi\ \mathrm{d}(\sqrt{a^2 - z^2}\sin\phi) \wedge \mathrm{d}z + \sqrt{a^2 - z^2}\sin\phi\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}(\sqrt{a^2 - z^2}\cos\phi) + z\ \mathrm{d}(\sqrt{a^2 - z^2}\cos\phi) \wedge (\sqrt{a^2 - z^2}\sin\phi) = \\ & \sqrt{\cdot}\cos\phi\left(\sqrt{\cdot}\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\right) \wedge \mathrm{d}z + \sqrt{\cdot}\sin\phi\ \mathrm{d}z \wedge (-\sqrt{\cdot}\sin\phi\ \mathrm{d}\phi) + z\ \left(\cos\phi\ \mathrm{d}\sqrt{\cdot} - \sqrt{\cdot}\sin\phi\ \mathrm{d}\phi\right) \wedge \left(\sin\phi\ \mathrm{d}\sqrt{\cdot} + \sqrt{\cdot}\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\right) = \\ & (\sqrt{\cdot})^2\ \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}z + z\left(\sqrt{\cdot}\cos^2\phi\ \mathrm{d}\sqrt{\cdot} \wedge \mathrm{d}\phi - \sqrt{\cdot}\sin^2\phi\ \mathrm{d}\phi\ \wedge \mathrm{d}\sqrt{\cdot}\right) = (a^2 - z^2)\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}z - z\sqrt{\cdot}\ \mathrm{d}\phi \wedge \left(\frac{1}{\sqrt{\cdot}}(-z)\mathrm{d}z\right) = a^2\ \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Teraz wykonajmy całowanie po dziedzinie parmetryzacji $U = \{(\phi, z) \mid \phi \in (0, 2\pi), z \in (a/2, a)\}$, przyjmując, że $(\boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_z)$ jest orientacją na U:

$$\int_U \Phi^*\omega = \int_U a^2\ \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}z = \int_U a^2\ \mathrm{d}^2(\phi, z) = \pi a^3\ .$$

Zastanówmy się teraz nad zgodnością przyjętej orientacji U z orientacją A. Zobaczmy na co przechodzą wektory bazowe $\boldsymbol{e}_\phi$ oraz $\boldsymbol{e}_z$ przy $\mathrm{d}\Phi$ w punkcie $\boldsymbol{p} = (\phi = 0, z = a/2)$. Prosty rachunek daje nam

$$\boldsymbol{v}_1 = \mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{p}}[\boldsymbol{e}_\phi] = [0, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0] \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{v}_2 = \mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{p}}[\boldsymbol{e}_z] = [-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1]\ .$$

Ich iloczyn wektorowy $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ to $[\frac{\sqrt{3}a}{3}, 0, +\frac{a}{2}]$ jest skierowany na zewnątrz, a zatem przyjęliśmy orientację zgodną ze standardową orientacją sfery. Odp $\int_A \omega = \pi a^3$.

Operację różniczki zewnętrznej d *możemy rozszerzyć ze zbioru funkcji gładkich* $C^\infty(U)$ *na zbiór form dowolnego stopnia* $\Omega^k(U)$ *wzorem*

$$\mathrm{d}\left(\sum_I f_I\ \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\right) = \sum_I \mathrm{d}f_I \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\ ,$$

a więc d *różniczkuje wszystkie funkcje, natomiast zostawia w spokoju wszystkie 1-formy bazowe* $\mathrm{d}x_i$.

Wynikają stąd następujące własności operacji d *dla* $f \in C^\infty(U)$ *oraz* $\alpha, \beta \in \Omega^k(U)$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0, \quad \mathrm{d}(f \cdot \alpha) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f \cdot \mathrm{d}\alpha, \quad \mathrm{d}(\alpha + \beta) = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta\ .$$

Przykład. Rozważmy formę $\omega = x\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ wówczas

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 3\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\ .$$

Przykład. Zauważmy, że forma $\omega = g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ jest zamknięta wtedy i tylko wtedy gdy $g'_y = h'_x$. Istotnie

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}y = (g'_x\mathrm{d}x + g'_y\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x + (h'_x\mathrm{d}x + h' y\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}y = (g'_y - h'_x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ .$$

Definicja. Rozważmy formę $\omega \in \Omega^k(U)$. Powiemy, że ω jest *zamknięta* gdy $\mathrm{d}\omega = 0$, oraz że jest *dokładna*, jeśli istnieje forma $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}\alpha$.

Ponieważ dla dowolnej $k-1$ formy α mamy $\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$, każda forma dokładna jest zamknięta, ale niekoniecznie odwrotnie, czego dowodzi przykład $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Co więcej, jak widzimy z rozpatrywania tej samej formy na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$ to czy dana forma zamknięta czy nie może zależeć od topologii rozpatrywanego zbioru.

Twierdzenie Stokes'a stanowi daleko idące uogólnienie Zasadniczego Twierdzenia Analizy:

Twierdzenie (Stokes'a)**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie $(k+1)$-wymiarową zorientowaną rozmaitością z brzegiem ∂M. Rozważmy k-formę $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, wówczas*

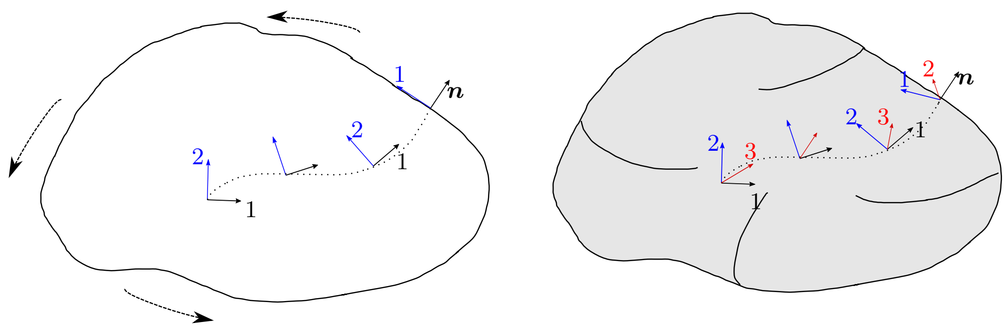
$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \ ,$$

gdzie ∂M ma naturalną orientację dziedziczoną z M:

$$\boldsymbol{or}_M = \{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{or}_{\partial M}\} \ .$$

$\boldsymbol{n}$ oznacza tutaj wektor normalny do brzegu ∂M skierowany na zewnątrz M.

Uzgadnianie orientacji brzegu i wnętrza – przypadek 2D i 3D:



Wróćmy teraz do kilku starych zadań uzbrojeni w twierdzenie Stokesa:

Zadanie 2. Korzystając z tw Stokesa oblicz całkę z formy $\omega = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ po konturze C gdzie

a) C_a jest brzegiem prostokąta $[-a,a] \times [-b,b] \subset \mathbb{R}^2$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,

b) C_b jest okręgiem $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Rozwiązanie: Policzmy różniczkę formy ω:

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x) = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = 2\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\ .$$

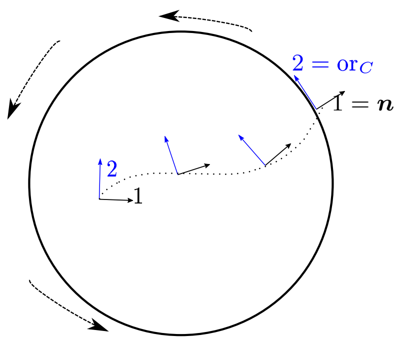
Okazało się, że $\mathrm{d}\omega$ to podwojona forma objętości w $\mathbb{R}^2$. Wobec tego jeśli $S \subset \mathbb{R}^2$ jest obszarem 2-wymiarowym ze standardową orientację $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ w $\mathbb{R}^2$ to

$$\int_S \mathrm{d}\omega = \int_S 2\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 2\int_S \mathrm{d}^2(x,y) = 2\ \lambda_2(S)\ .$$

Z drugiej strony twierdzenie Stokes'a mówi nam, że jeśli ∂S jest 1-wymiarowym brzegiem ∂S (z orientacją indukowaną z wybranej wcześniej standardowej orientacji $\mathbb{R}^2$) to

$$\int_S \mathrm{d}\omega = \int_{\partial S} \omega\ .$$

W przypadku (b) możemy wybrać jako S dysk jednostkowy $S_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ zaś w przypadku (a) prostokąt $S_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq b\}$. Wnioskujemy stąd, że $\int_{C_a} \omega = \pm 8\ a\ b$ oraz $\int_{C_b} = \pm 2\ \pi$, przy czym wybór znaku zależy od tego czy orientacja indukowana na krzywej C z orientacji standardowej na $\mathbb{R}^2$ jest przeciwna, czy zgodna z ruchem wskazówek zegara. Łatwo się przekonać, że indukowana orientacja jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara, a więc taka jak w zadaniu – rysunek.



Zadanie 3. Korzystając z twierdzenia Stokes'a oblicz całkę z formy $\omega = x\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ po

a) sferze $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$

b) po wycinku sfery $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > \frac{a}{2}\}$.

Przyjmujemy, że orientacja S i $A \subset S$ jest zadana przez wybór bazy uporządkowanej $(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ w punkcie $(a,0,0)$. Zakładamy, że $a > 0$.

Rozwiązanie: Łatwo policzyć, że $\mathrm{d}\omega = 3\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. Aby zrobić punkt a) zauważmy, że S jest brzegiem kuli $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$. Przyjmijmy standardową orientację $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ w $\mathbb{R}^3$ i wówczas

$$\int_B \mathrm{d}\omega = \int_B 3\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 3\int_B \mathrm{d}^3(x,y,z) = 3\ \lambda_3(B) = 4\pi a^3\ .$$

Z drugiej strony, z twierdzenia Stokes'a

$$\int_B \mathrm{d}\omega = \int_{S=\partial B} \omega \ ,$$

przy czym orientacja S musi być indukowana z wybranej przez nas orientacji standardowej w $\mathbb{R}^3$. Wobec tego szukana przez nas całka wynosi

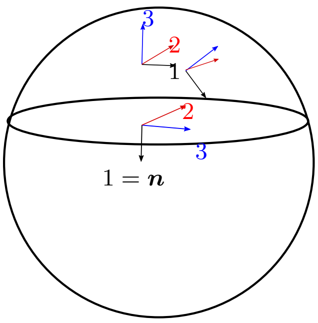
$$\int_S \omega = \pm 4\pi a^3 \ ,$$

przy czym znak plus bierzemy jeśli ww. orinetacja indukowana jest taka jak w treści zadania, a minus gdy jest przeciwna. Łatwo zauważyć, że baza $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ jest zgodna ze standardową orientacją $\mathbb{R}^3$. Ponadto pierwszy wektor wektor $\boldsymbol{e}_x$ jest wektorem normalnym do S w punkcie $(a,0,0)$ skierowanym na zewnątrz kuli, zaś pozostałe wektory $\boldsymbol{e}_y$ i $\boldsymbol{e}_z$ są styczne do S. Wobec tego baza uporządkowana $(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ w punkcie $(a,0,0)$ wyznacza orientację $S = \partial B$ indukowaną ze standardowej orientacji $\mathbb{R}^3$. Jest to ta sama orientacja co w zadaniu, zatem $\int_S \omega = +4\pi a^3$.

Punkt (b) traktujemy podobnie. Rozważmy wycinek kuli $B' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2, z > \frac{a}{2}\}$. Ponownie przyjmijmy standardową orientację $\mathbb{R}^3$. Wówczas

$$\int_{B'} \mathrm{d}\omega = \int_{B'} 3\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 3\int_{B'} \mathrm{d}^3(x,y,z) = 3\ \lambda_3(B') \overset{\text{Fub.}}{=} 3\int_{\frac{a}{2}}^{a} \int_{\{x^2+y^2<a^2-z^2\}} \mathrm{d}^2(x,y)\mathrm{d}z =$$
$$3\int_{\frac{a}{2}}^{a} \pi(a^2-z^2)\mathrm{d}z = \ldots = \frac{5}{8}\pi a^3 \ .$$

Zauważmy, że brzegiem B' jest suma zbioru A i „denka" $D = \{(x,y,\frac{a}{2}) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 < a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\}$. Powtarzając rozważania z poprzedniego punktu dochodzimy do tego, że orientacja indukowana na A ze standardowej orientacji w $\mathbb{R}^3$ to orientacja dana w zadaniu. Z kolei orientację denka D możemy łatwo odczytać z poniższego rysunku:



a więc $(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_x)$ jest orientacją denka D. (Inny sposób: baza standardowa $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ ma tę samą orientację co baza $(-\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_x)$ – macierz przejścia to $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – ma wyznacznik dodatni. Wektor $-\boldsymbol{e}_z$ jest wektorem normalnym zewnętrznym w punktach denka, zaś $\boldsymbol{e}_y$ i $\boldsymbol{e}_x$ to wektory styczne do denka. Stąd $(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_x)$ jest indukowaną orientacją D.)

Z twierdzenia Stokesa:

$$\int_{B'} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial B' = A\cup D} \omega = \int_A \omega + \int_D \omega \ ,$$

Skąd $\int_A \omega = \int_{B'} \mathrm{d}\omega - \int_D \omega$, gdzie A jest zorientowana jak w zadaniu, a D jak wyżej. D jest naturalnie sparametryzowane przez

$$\Phi : (x,y) \longmapsto \left(x, y, \frac{a}{2}\right) \ .$$

Forma ω w tej parmetryzacji wynosi (zauważmy, że $\mathrm{d}z = 0$)

$$\Phi^*\omega = 0 + 0 + \frac{a}{2}\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Pamiętajmy, że w obrazie Φ (na denku D) parametryzacją powinno być $(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_x)$, a zatem w dziedzinie Φ musimy wybrać również parametryzację $(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_x)$, czyli minus parametryzację standardową. Wobec tego

$$\int_D \omega = \int_{\{x^2+y^2\leq \frac{3}{4}a^2\}} \frac{a}{2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{a}{2}\int_{\{x^2+y^2\leq \frac{3}{4}a^2\}} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \overset{\text{minus or. standardowa}}{=} -\frac{a}{2}\int_{\{x^2+y^2\leq \frac{3}{4}a^2\}} \mathrm{d}^2(x,y) =$$
$$-\frac{a}{2}\,\lambda_2(\{x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}a^2\}) = -\frac{a}{2}\,\pi\frac{3}{4}a^2 = -\frac{3}{8}\pi a^3 \ .$$

Ostatecznie

$$\int_A \omega = \int_{B'} \mathrm{d}\omega - \int_D \omega = \frac{5}{8}\pi a^3 - \left(-\frac{3}{8}\pi a^3\right) = \pi a^3 \ ,$$

tak jak w poprzednim rozwiązaniu.