AM II.2 2019/20 (gr 3)

17. ćwiczenia zdalne – 2 czerwca 2020.
Orientacja. Całka z formy po rozmaitości zorientowanej.

Zadanie 1. Rozważmy odwzorowanie gładkie $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i niech $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ będzie standardową formą objętości. Wykaż, że

$$(F^*\omega)_{\boldsymbol{y}} = \det\left[\mathrm{d}F(\boldsymbol{y})\right] \cdot \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_n \ .$$

Rozwiązanie: Przypomnijmy, że $\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \ldots \\ \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$. Z definicji cofnięcia

$$(F^*\omega)_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = \omega_{F(\boldsymbol{y})}\left[\mathrm{d}F_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{v}_1], \ldots, \mathrm{d}F_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{v}_n]\right] = \det \begin{pmatrix} \mathrm{d}F_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{v}_1] \\ \ldots \\ \mathrm{d}F_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{v}_n] \end{pmatrix} = \det \left[\mathrm{d}F_{\boldsymbol{x}} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \ldots \\ \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \right] = \det\left[\mathrm{d}F_{\boldsymbol{x}}\right] \cdot \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \ldots \\ \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \ ,$$

skąd

$$(F^*\omega)_{\boldsymbol{y}} = \det\left[\mathrm{d}F_{\boldsymbol{y}}\right]\ \mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_n \ .$$

Orientacja rozmaitości różniczkowej.
Intuicyjnie orientacja przestrzeni wektorowej to umowa jaką kolejność wektorów bazowych uznajemy za dodatnią, a jaką za ujemną.

Definicja. Powiemy, że dwie uporządkowane (kolejność wektorów jest ważna!) bazy $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ oraz $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k)$ zadają tę samą *orientację* przestrzeni wektorowej V, gdy wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni. Gdy wyznacznik ten jest ujemny powiemy, że orientacje obu baz są *przeciwne.* Każda przestrzeń wektorowa ma zatem dwie kanoniczne orientacje.

W przypadku przestrzeni eulkidesowej $\mathbb{R}^k$ możemy mówić o *orientacji standardowej* zadanej przez uporządkowaną bazę kanoniczną $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$.

Przykład. Rozważmy $\mathbb{R}^3$ ze standardową orientacją (e_1, e_2, e_3). Baza uporządkowana (e_1, e_3, e_2) ma przeciwną orientację, gdyż macierz przejścia między tymi bazami, a wiec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ma ujemny wyznacznik. Z kolei baza uporządkowana $\boldsymbol{v}_1 = [2, 1, 0]$, $\boldsymbol{v}_2 = [3, 0, 0]$, $\boldsymbol{v}_3 = [0, 0, -4]$ zadaje tę samą orientację co standardowa, gdyż odpowiedni wyznacznik macierzy przejścia $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ wynosi 12 i jest dodatni.

Orientacja rozmaitości różniczkowej to wybór orientacji w każdej jej przestrzeni stycznej, tak aby wszystkie te orientacje były ze sobą zgodne.

Definicja. *Orientacją* rozmaitości różniczkowej, nazywamy lokalnie zgodny wybór orientacji jej wszystkich przestrzeni stycznych. Intuicyjnie rozumiemy, że wybrane orientacje zmieniają się w sposób ciągły od punktu do punktu. Formalna definicja wymaga wprowadzenia pojęcia atlasu zorientowanego. Nie wszystkie rozmaitości da się zorientować (np. wstęga Moebiusa). Te które dopuszczają orientację nazywamy *orientowalnymi.*

Z punktu widzenia praktyki przydatny będzie następujący fakt:

Stwierdzenie. *Każda rozmaitość będąca brzegiem innej rozmaitości (jak też każda podrozmaitość takiego brzegu) jest orientowalna. Na przykład sfera 2-wymiarowa, jest orientowalna bo jest brzegiem kuli 3-wymiarowej. Podobnie górna półsfera jest orientowalna jako podrozmaitość na takim brzegu.*

Jeśli M jest rozmaitością orientowalną i spójną to jej orientacja jest jednoznacznie wyznaczona przez podanie orientacji jej dowolnie wybranej przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M$.

Definicja (Całka z k-formy różniczkowej)**.** Dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^k$ z kanoniczną orientacją $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ definiujemy

$$\int_U f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k = \int_U f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}^k(\boldsymbol{x}) \ ,$$

a więc całka z k-formy $f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ pokrywa się ze standardową całką Lebesgue'a, z dokładnością do zmiany znaku przy innym wyborze orientacji. Formę $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ nazywamy *formą objętości.*

Całkę z formy różniczkowej na podrozmaitości definiujemy przechodząc od krzywych do płaskich współrzędnych.
Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarową podrozmaitością zorientowaną. *Całkę z $k-$formy $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ na rozmaitości S* definiujemy jako

$$\int_S \alpha = \int_U \Phi^* \alpha \ ,$$

gdzie $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ jest dowolną parametryzacją $S = \Phi(U)$ zgodną z orientacją S. Zgodność orientacji na U i na S oznacza, że jeśli $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ jest wybraną orientacją na U, to baza uporządkowana $(\mathrm{d}\Phi[\boldsymbol{v}_1], \ldots, \mathrm{d}\Phi[\boldsymbol{v}_k])$ jest zgodna z wybraną orientacją S.

Podsumowując, standardowe zadanie na policzenie $\int_S \omega$, gdzie $S \subset \mathbb{R}^n$ jest k-wymiarową zorientowaną rozmaitością, a $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ k-formą różniczkową robi się następująco:

1. *Znajdujemy parmetryzację $\Phi : \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^n$, taką że $\Phi(U) = S$.*
2. *Liczymy cofnięcie $\Phi^* \omega$*
3. *Liczmy całkę $\int_U \Phi^* \omega$ – tak jak zwykłą całkę Lebesgue'a.*
4. *Uzgadniamy orientację U z orientacją S i ewentualnie zmieniamy znak w powyższej całce:*

$$\int_{S=\Phi(U)} \omega = \pm \int_U \Phi^* \omega$$

Zadanie 2. Oblicz całkę z formy $\omega = x \ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y \ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z \ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ po sferze $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$. Przyjmujemy, że orientacja S jest zadana przez wybór bazy uporządkowanej $(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ w punkcie $(1, 0, 0)$. Zakładamy, że $a > 0$.

Rozwiązanie: Zacznijmy od znalezienia parametryzacji sfery. Naturalnym kandydatem jest parametryzacja sferyczna

$$\Phi : (\phi, \beta) \longmapsto (x = a\ \cos\phi\ \cos\beta, y = a\ \sin\phi\ \cos\beta, z = a\ \sin\beta)\ ,$$

gdzie $U = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni (\phi, \beta)$ jest dziedziną parametryzacji. Po dość żmudnych rachunkach możemy policzyć cofnięcie

$$\Phi^*\omega = \ldots = a^3 \cos\beta\ \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\beta\ .$$

Przyjmijmy na razie, że orientacja w $U \ni (\phi, \beta)$ jest wyznaczona przez bazę $(\boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{e}_\beta)$ (czyli, że ϕ jest pierwszą współrzędną, a β drugą). Wówczas

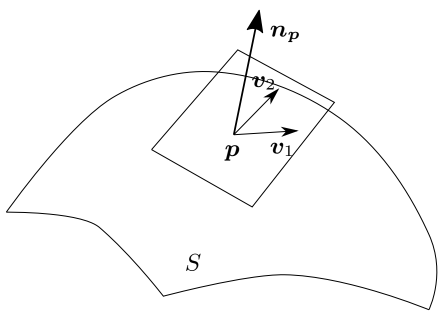
$$\int_U \Phi^*\omega = \int_U a^3 \cos\beta\ \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\beta = a^3 \int_U \cos\beta\ \mathrm{d}^2(\phi, \beta) = 4\pi a^3\ .$$

Na koniec zastanówmy się jak się ma wybrana orientacja w U do orientacji na S. W tym celi zobaczmy na co przechodzą wektory bazowe $\boldsymbol{e}_\phi$ i $\boldsymbol{e}_\beta$ przy $\mathrm{d}\Phi(0,0)$ (wybieramy punkt $(0,0)$, bo $\Phi(0,0) = (1,0,0)$, a więc jest to przeciwobraz punktu w którym zadaliśmy orientację.) Prosty rachunek daje nam $\mathrm{d}\Phi_{\mathbf{0}}[\boldsymbol{e}_\phi] = a[0,1,0] = a\ \boldsymbol{e}_y$ i $\mathrm{d}\Phi_{\mathbf{0}}[\boldsymbol{e}_\beta] = a[0,0,1] = a\ \boldsymbol{e}_z$. Jak widać baza $(a\ \boldsymbol{e}_y, a\ \boldsymbol{e}_z)$ zadaje tę samą orientację co baza $(\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$, a więc nie musumy zmieniać znaku w całce. Odp. $4\pi a^3$.

Inaczej o orientacji powierzchni.
W przypadku powierzchni dwuwymiarowej $S \subset \mathbb{R}^3$ często mówi się, że jej orientacja to wybór pola wektorów normalnych do S. Mianowicie, jeśli $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ jest uporządkowaną bazą przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M$ zadającą orientację to iloczyn wektorowy $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ jest wektorem prostopadłym zarówno do $\boldsymbol{v}_1$ jak i $\boldsymbol{v}_2$, a więc do całej rozmaitości S w punkcie $\boldsymbol{p}$. Po unormowaniu dostajemy wektor jednostkowy

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2\|}\ .$$

Wybór jednego z dwóch jednostkowych wektorów prostopadłych $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{p}}$ lub $-\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{p}}$ jest równoważny z wyborem orientacji w punkcie $\boldsymbol{p}$.



Zadanie 3. Rozważmy dwuwymiarową rozmaitość zorientowaną $S \subset \mathbb{R}^3$ i niech $\boldsymbol{F} = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym, zaś $\eta_{\boldsymbol{F}} = f\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - g\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + h\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Wykaż, że

$$\int_S \eta_{\boldsymbol{F}} = \int_S \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \rangle \mathrm{d}\sigma_2(\boldsymbol{x})\ ,$$

gdzie σ_2 oznacza miarę powierzchniową na S, zaś $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ to wektor normalny zewnętrzny (a więc zgodny z wybraną orientacją) do S w punkcie $\boldsymbol{x} \in S$.

Rozwiązanie: Przypomnijmy, że zajmowaliśmy się już formą $\eta_{\boldsymbol{F}}$ otrzymując wzór

$$\eta_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}] = \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\rangle \ .$$

Ustalmy dowolną parmatryzację $\Phi:\mathbb{R}^2\supset U\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $S=\Phi(U)$ i przyjmijmy, że standardowa orientacja współrzędnych $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$ na U jest zgodna z wybraną orientacją S. Mamy $(\Phi^*\eta_{\boldsymbol{F}})(\boldsymbol{y})=\xi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}y_1\wedge\mathrm{d}y_2$ dla pewnej funkcji $\xi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Z definicji

$$\int_S \eta_{\boldsymbol{F}} = \int_U \Phi^*\eta_{\boldsymbol{F}} = \int_U \xi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^2\boldsymbol{y} \ .$$

Zauważmy teraz, że

$$\xi(\boldsymbol{y}) = \xi(\boldsymbol{y})\ \mathrm{d}y_1\wedge\mathrm{d}y_2[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2] = (\Phi^*\eta_{\boldsymbol{F}})(\boldsymbol{y})[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2] \overset{\text{def. cofnięcia}}{=} \eta_{\boldsymbol{F}}(\Phi(\boldsymbol{y}))[\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_1],\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_2]] = \langle \boldsymbol{F}(\Phi(\boldsymbol{y})), \mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_1]\times\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_2]\rangle \ .$$

Z założenia baza uporządkowana $(\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_1],\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_2])$ jest zgodna z orientacją, a zatem skoro iloczyn wektorowy to wektor prostopadły do pary wektorów o długości równej polu równoległoboku przez nie rozpięte, mamy

$$\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_1]\times\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_1] = \boldsymbol{n}(\Phi(\boldsymbol{y}))\cdot G(\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_1],\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_2]) \ ,$$

gdzie $G(\cdot)$ to znany nam już wcześniej wyznacznik Gramma. Ostatecznie

$$\int_S \eta_{\boldsymbol{F}} = \int_U \xi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}^2\boldsymbol{y} = \int_U \langle \boldsymbol{F}(\Phi(\boldsymbol{y})), \boldsymbol{n}(\Phi(\boldsymbol{y}))\rangle\cdot G(\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_1],\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{y}}[\boldsymbol{e}_2])\mathrm{d}^2\boldsymbol{y} \overset{\text{wzór na miarę pow.}}{=} \int_S \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\rangle \mathrm{d}\sigma_2(\boldsymbol{x}) \ .$$

Przeprowadzone obliczenia pozwalają nam zinterpretować całkę z formy $\eta_{\boldsymbol{F}}$ po S jako *strumień pola wektorowego* $\boldsymbol{F}$ *przepływającego przez powierzchnię* S.

`Zadanie domowe na 4 czerwca:`

Zadanie 4. Używając podstawienia walcowego:

$$\Phi:(\phi,z)\longmapsto (x=\sqrt{a^2-z^2}\cos\phi, y=\sqrt{a^2-z^2}\sin\phi, z=z)$$

oblicz całkę z formy $\omega = x\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ po wycinku sfery $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=a^2, z>\frac{a}{2}\}$. Orientację A przyjmujemy tak jak na ćwiczeniach. Zakładamy, że $a>0$.

Zadanie 5. Oblicz całkę z formy $\omega = x\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\sin z\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (z+1)\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ po rozmaitości M zdefiniowanej jako część powierzchni $x^2+y^2=\cos^2 z$ zawartej pomiędzy płaszczyznami $z=0$ i $z=\frac{\pi}{4}$ z orientacją wyznaczoną przez bazę $\{\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x\}$ w punkcie $(0,1,0)\in M$.
