AM II.2 2019/20 (gr 3)

16. ćwiczenia zdalne – 28 maja 2020. Wielo-formy różniczkowe. Pullback i całka z formy pod rozmaitości zorientowanej.

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnych form $\alpha \in \Omega^k(U)$, oraz $\beta \in \Omega^l(U)$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi wzór

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha \ .$$

Rozwiązanie: Wzór wystarczy sprawdzić na formach bazowych $\Omega^k(U)$ oraz $\Omega^l(U)$. Rozważmy $\alpha = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ oraz $\beta = \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}$. Wówczas

$$\alpha \wedge \beta = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l} = (-1)^{k \cdot l} \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = (-1)^{k \cdot l} \beta \wedge \alpha \ .$$

Uzasadnienie zmiany znaku: aby zamienić kolejność bazowych 1-form postępujemy indukcyjnie: najpierw przenosimy formę $\mathrm{d}x_{i_k}$ na koniec wyrażenia. W tym celu musimy dokonać l zamian z formami $\mathrm{d}x_{j_1}, \ldots, \mathrm{d}x_{j_l}$, co zmienia nam znak wyrażenia o czynnik $(-1)^l$. Następnie 1-formę $\mathrm{d}x_{i_{k-1}}$ przenosimy na przedostatnią pozycję, ponownie dokonując k zamian z formami $\mathrm{d}x_{j_1}, \ldots, \mathrm{d}x_{j_l}$, co ponownie zmienia znak o czynnik $(-1)^l$. Postępujemy w ten sposób kolejno z każdą z 1-form $\mathrm{d}x_{i_k}, \ldots, \mathrm{d}x_{i_1}$ (k form), w rezultacie czego znak całego wyrażenia zmieni się o czynnik $(-1)^{k \cdot l}$.

Zadanie 2. Niech $\boldsymbol{F} = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym (gładkim odwzorowaniem z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$). Wykaż, że odwzorowanie:

$$\eta_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle \in \mathbb{R}$$

jest 2-formą różniczkową w $\mathbb{R}^3$. Wyraź tę formę w bazie $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\}$.

Rozwiązanie: Korzystając z wyników poprzedniego zadania wiemy, że iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$ możemy wyrazić jako $[\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y]$, stąd

$$\eta_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), [\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y] \rangle = f(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - g(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + h(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \ .$$

Dla wielo-form mamy naturalne rozszerzenie definicji cofnięcia

Definicja. *Cofnięciem* (*przeciągnięciem*, albo *pull-backiem*) k-formy $\omega \in \Omega^k(U)$ za pomocą odwzorowania gładkiego $\Phi : V \to U$ nazywamy formę $\Phi^*\omega \in \Omega^k(V)$ określoną wzorem

$$\Phi^*\omega_{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k] = \omega_{\Phi(\boldsymbol{x})}[\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}\Phi[\boldsymbol{v}_1], \ldots, \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}\Phi[\boldsymbol{v}_k]] \ .$$

Innymi słowy, aby policzyć wartość formy $\Phi^*\omega$ na wektorach $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ w punkcie $\boldsymbol{x}$ przepychamy te wektor do U za pomocą pochodnej $\mathrm{d}\Phi_{\boldsymbol{x}}$ i liczymy wartość formy ω na obrazie.

Lemat 1 (Własności pull-backu). *Dla form $\alpha \in \Omega^k(U)$ oraz $\beta \in \Omega^l(U)$ zachodzą wzory:*

$$\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\Phi^*\alpha) \wedge (\Phi^*\beta) \ .$$

Razem ze wzorem $\Phi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\Phi^* f)$ pozwala to policzyć pull-back dowolnej k-formy różniczkowej. funkcji $f : U \to \mathbb{R}$ zachodzą wzory $\Phi^* f(\boldsymbol{x}) = f(\Phi(\boldsymbol{x}))$ (pull-back funkcji to po prostu złożenie) oraz $\Phi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\Phi^* f)$ (przeciąganie jest przemienne z operacją różniczki d). Z ich pomocą można policzyć pull-back każdej formy.

Zadanie 3. Znajdź $\Phi^*\omega$ dla $\Phi(u, v) = (x = uv, y = u^2, z = 3u + v)$, $\omega = y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$.

Rozwiązanie: Wystarczy wstawić $x = uv$, $y = u^2$ i $z = 3u + v$ do wzoru na ω. Konkretniej:

$$\begin{aligned}\Phi^*\omega =& u^2 \ \mathrm{d}(uv) \wedge \mathrm{d}(3u + v) = u^2 \ \ (u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u) \wedge (3\mathrm{d}u + \mathrm{d}v) = \\ & u^2 \left[3u \ \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u + u \ \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}v + 3v \ \mathrm{d}u \ \ \wedge \mathrm{d}u + v \ \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v\right] = u^2(v - 3u)\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \ .\end{aligned}$$

Zadanie 4. Oblicz formę $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ we współrzędnych biegunowych ($x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$).

Rozwiązanie: Mamy

$$\begin{aligned}\Phi^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) =& \mathrm{d}(r\cos\phi) \wedge \mathrm{d}(r\sin\phi) = (\cos\phi \ \mathrm{d}r - r\sin\phi \ \mathrm{d}\phi) \wedge (\sin\phi \ \mathrm{d}r + r\cos\phi \ \mathrm{d}\phi) = \\ & r\cos^2\phi \ \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\phi - r\sin^2\phi \ \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}r = r \ \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\phi \ .\end{aligned}$$

Definicja (Całka z k-formy różniczkowej). Dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^k$ z kanoniczną orientacją $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ definiujemy

$$\int_U f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k = \int_U f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^k(\boldsymbol{x}) \ ,$$

a więc całka z k-formy $f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ pokrywa się ze standardową całką Lebesgue'a, z dokładnością do zmiany znaku przy innym wyborze orientacji. Formę $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ nazywamy *formą objętości.*

Całkę z formy różniczkowej na podrozmaitości definiujemy przechodząc od krzywych do płaskich współrzędnych.
Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie k-wymiarową podrozmaitością zorientowaną. *Całkę z $k-$formy $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ na rozmaitości S* definiujemy jako

$$\int_S \alpha = \int_U \Phi^*\alpha \ ,$$

gdzie $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ jest dowolną parametryzacją $S = \Phi(U)$ zgodną z orientacją S. Zgodność orientacji na U i na S oznacza, że jeśli $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ jest wybraną orientacją na U, to baza uporządkowana $(\mathrm{d}\Phi[\boldsymbol{v}_1], \ldots, \mathrm{d}\Phi[\boldsymbol{v}_k])$ jest zgodna z wybraną orientacją S.

Zadanie 5. Oblicz całkę z formy $\alpha = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ po połówce torusa sparametryzowanej następująco ($x = (4 + \cos\alpha)\cos\theta, y = (4 + \cos\alpha)\sin\theta, z = \sin\alpha$), gdzie $\alpha \in [0, 2\pi]$ i

$\theta \in [0, \pi]$. Przyjmujemy, że orientacja torusa jest dziedziczona z orientacji $\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\theta$ w $\mathbb{R}^2$ za pomocą rozważanej parametryzacji.

Rozwiązanie: *UZUPEŁNIĆ*

`Zadania domowe na 2 czerwca:`

Zadanie 6. Oblicz cofnięcie formy $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ za pomocą odwzorowania $\Phi(u, v) = (x = uv, y = u^2, z = 3u + v)$. Uzasadnij wynik bez wykonywania obliczeń.

Zadanie 7. Oblicz cofnięcie formy $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ za pomocą odwzorowania $\Phi(r, \varphi, \beta) = (r \ \cos\phi \ \cos\beta, r \ \sin\phi \ \cos\beta, r \ \sin\beta)$.

Zadanie 8. Oblicz całkę z formy $\omega = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ po konturze C gdzie

a) C jest brzegiem prostokąta $[-a, a] \times [-b, b] \subset \mathbb{R}^2$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara,

b) C jest okręgiem $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Co zauważyłeś?
