AM II.2 2019/20 (gr 3)

15. ćwiczenia zdalne – 21 maja 2020. Wprowadzenie do wielo-form różniczkowych.

Definicja. Rozważmy przestrzeń liniową V. Przekształceniem *k-liniowym antysymetrycznym na przestrzeni V* nazywamy odwzorowanie

$$\phi : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k\text{-razy}} \to \mathbb{R}$$

(będziemy pisali też $\phi : \Lambda^k(V) \to \mathbb{R}$, lub $\phi \in \Lambda^k(V^*)$) o następujących własnościach:

a) ϕ jest liniowe względem każdej zmienne z osobna, tzn. dla dowolnego indeksu $i = 1, 2 \ldots, k$ oraz dla dowolnych $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_i \in \mathbb{R}^n$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$ mamy

$$\phi[\boldsymbol{v}_1, \ldots, a \cdot \boldsymbol{v}_i + b \cdot \boldsymbol{w}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k] = a \cdot \phi[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k] + b \cdot \phi[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k] \ .$$

b) zamiana kolejności dowolnych dwóch argumentów zmienia znak:

$$\phi[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_k] = -\phi[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k] \ .$$

Zauważmy, że wprost z definicji wynikają następujące własności:

$$\begin{aligned} \phi[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{w}, \ldots \boldsymbol{w}, \ldots, \boldsymbol{v}_k] &= 0 \quad \textit{oraz} \\ \phi[\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(i)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k)}] &= (-1)^{\mathrm{sng}(\sigma)} \phi[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k], \quad \textit{gdzie } \sigma \textit{ jest dowolną permutacją.} \end{aligned}$$

Jeśli $\{e_i\}$ jest bazą przestrzeni V, zaś $\{e_i^* = \mathrm{d}x_i\}$ bazą dualną, to bazę przestrzeni $\Lambda^k(V^*)$ stanowią odwzorowania:

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} : \Lambda^k(V) \to \mathbb{R} \quad \textit{gdzie } 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$$

określone następująco

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k] = \det\Big(\textit{minor } (i_1, \ldots, i_k) \textit{ macierzy } [\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_k]\Big).$$

Wynika stąd, że przestrzeń $\Lambda^k(V)$ przy n-wymiarowej przestrzeni V jest $\binom{n}{k}$-wymiarowa.
*Wygodnie jest myśleć o tych obiektach, że powstają z 1-form $\mathrm{d}x_i$ poprzez k-krotne użycie operacji $\wedge$ (*wedge, dziubek*) pamiętając, że*

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \ .$$

Zadanie 1. Oblicz wymiar przestrzeni $\Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*)$, $\Lambda^{n-1}((\mathbb{R}^n)^*)$, $\Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$ i $\Lambda^{n+k}((\mathbb{R}^n)^*)$.
Rozwiązanie: Symbole Newtona dają kolejno: n, n, 1, 0. Dobrze przy tej okazji opowiedzieć jak wygląda ogólna forma w każdym przypadku.
1-formę interpretujemy jako iloczyn skalarny z ustalonym wektorem:

$$\alpha = a_1 \ \mathrm{d}x_1 + \ldots a_n \ \mathrm{d}x_n \in \Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*), \qquad \alpha[\boldsymbol{v}] = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle \quad \text{gdzie } \boldsymbol{a} = [a_1, \ldots, a_n].$$

n-formę interpretujemy jako przeskalowaną zorientowaną objętość układu n-wektorów:

$$\omega = a \ \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \in \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*), \qquad \omega[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = a \ \det[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n] \ .$$

$(n-1)$-formę możemy interpretować jako objętość nakarmioną pewnym ustalonym wektorem:

$$\beta = b_1\ \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n - b_1\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n + \ldots + (-1)^{n+1} b_n\ \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n-1},$$
$$\beta[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}] = \mathrm{vol}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}) \quad \text{gdzie } \boldsymbol{b} = [b_1, \ldots, b_n].$$

Zadanie 2. Niech $\eta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ oznacza standardowy iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$, tzn. $\eta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$. Wykaż, że

$$\eta = [\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y]\ .$$

Rozwiązanie: Najprościej to wytłumaczyć przywołując wzór na iloczyn wektorowy

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Laplace}}{=} \boldsymbol{e}_1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{pmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} =$$
$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] - \boldsymbol{e}_2 \cdot \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] + \boldsymbol{e}_3 \cdot \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\ ,$$

skąd już widać wszystko.

Jedno-formę określoną na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$ definiowaliśmy jako rodzinę odwzorowań liniowych $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładko parametryzowaną punktami zbioru U. Analogicznie k-formę na U określimy jako rodzinę odwzorowań k-liniowych antysymetrycznych gładko-parametryzowaną punktami U.

Definicja. *k-formą różniczkową* na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy rodzinę odwzorowań k-liniowych antysymetrycznych gładko indeksowaną punktami U.
Innymi słowy k-forma to funkcja

$$\omega : U \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R},$$

gdzie zależność od $\boldsymbol{x} \in U$ jest gładka, a zależność od $\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ jest k-liniowa antysymetryczna. Będziemy pisali $\omega(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k]$, albo $\omega_{\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k]$. Zbiór wszystkich k-form na U oznaczamy symbolem $\Omega^k(U)$.

Każdą k-formę możemy jednoznacznie zapisać w postaci

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} f_{i_1, \ldots, i_k}(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\ ,$$

gdzie $f_I \in C^\infty(U)$ są funkcjami gładkimi. Przyjmuje się też $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.

Operację $\wedge$ zdefiniowaną na bazie k-odwzorowaniach liniowych antysymetrycznych możemy naturalnie (dwu-liniowo) rozszerzyć do operacji na k-formach

$$\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \longrightarrow \Omega^{k+l}(U)\ .$$

`Zadania domowe na 28 maja:`

Zadanie 3. Oblicz

a) $(x\ \mathrm{d}y + y\ \mathrm{d}z + z\ \mathrm{d}x) \wedge (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$,

b) $(x\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$.

Zadanie 4. Niech $\boldsymbol{F} = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie polem wektorowym (gładkim odwzorowaniem z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$). Wykaż, że odwzorowanie:

$$\eta_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle \in \mathbb{R}$$

jest 2-formą różniczkową w $\mathbb{R}^3$. Wyraź tę formę w bazie $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\}$.

`Pisemnie na 2 czerwca:`

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int_\Gamma (y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$$

po krzywej $\Gamma = \{(t, t(1-\cos t), t\sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ zorientowanej w kierunku rosnącego t.
