**AM II.2 2019/20 (gr 3)**

# 14. ćwiczenia zdalne – 19 maja 2020.
# Całka z formy różniczkowej wzdłuż krzywej, pull-back

**Definicja.** *Cofnięciem* (*przeciągnięciem*, albo *pull-backiem*) formy $\omega \in \Omega^1(U)$ za pomocą odwzorowania gładkiego $\Phi : V \to U$ nazywamy formę $\Phi^*\omega \in \Omega^1(V)$ określoną wzorem

$$\Phi^*\omega(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}] = \omega(\Phi(\boldsymbol{x}))[\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}\Phi[\boldsymbol{v}]] \ .$$

Innymi słowy, aby policzyć wartość formy $\Phi^*\omega$ na wektorze $\boldsymbol{v}$ w punkcie $\boldsymbol{x}$ przepychamy ten wektor do $U$ za pomocą pochodnej $\Phi$ i liczymy wartość formy $\omega$ na obrazie.
*Uwaga:* $\Phi$ nie musi być dyfeomorfizem, a nawet $U$ i $V$ nie muszą być tego samego wymiaru!

**Lemat 1.** *Dla funkcji $f : U \to \mathbb{R}$ zachodzą wzory $\Phi^* f(\boldsymbol{x}) = f(\Phi(\boldsymbol{x}))$ (pull-back funkcji to po prostu złożenie) oraz $\Phi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\Phi^* f)$ (przeciąganie jest przemienne z operacją różniczki* d*). Z ich pomocą można policzyć pull-back każdej formy.*

*Zatem w praktyce, na przykład, dla $\Phi : (r, \phi) \mapsto (x = r\cos\phi, y = r\sin\phi)$ i $\omega = y^2\mathrm{d}x$, aby obliczyć $\Phi^*\omega$ wstawiamy po prostu wyrażenia $x = r\cos\phi$ i $y = r\sin\phi$ do wzoru na $\omega$:*

$$\Phi^*(y^2\mathrm{d}x) = (r\sin\phi)^2\ \mathrm{d}(r\cos\phi) = r^2\sin^2\phi(\cos\phi\ \mathrm{d}r - r\sin\phi\ \mathrm{d}\phi) \ .$$

**Zadanie 1.** Oblicz pull-back $\Phi^*\omega$ dla $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ i $\Phi(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$.

*Rozwiązanie:* Podstawiamy $x = r\cos\phi$ oraz $y = \sin\phi$ otrzymując

$$\begin{aligned}\Phi^*\theta = & \frac{r\cos\phi\ \mathrm{d}(r\sin\phi) - r\sin\phi\ \mathrm{d}(r\cos\phi)}{r^2} = \\ & \frac{r\cos\phi\,(\sin\phi\ \mathrm{d}r + r\cos\phi\ \mathrm{d}\phi) - r\sin\phi\,(\cos\phi\ \mathrm{d}r - r\sin\phi\ \mathrm{d}\phi)}{r^2} = \ldots = \mathrm{d}\phi \ .\end{aligned}$$

**Zadanie 2.** Znajdź postać formy $\omega = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ we współrzędnych biegunowych $\Phi(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi))$.

*Pull-back formy różniczkowej ma podobne znaczenie co zamiana zmiennych w całce*

**Lemat 2.** *Rozważmy dyfeomorfizm $\Phi : V \to U$, krzywą zorientowaną $\Gamma \subset V$ i formę $\omega \in \Omega^1(U)$ wówczas*

$$\int_\Gamma \Phi^*\omega = \int_{\Phi(\Gamma)} \omega \ ,$$

*gdzie orientacja krzywej $\Phi(\Gamma)$ jest indukowana z $\Gamma$.*

*Dowód.* Rozważmy dowolną parametryzację wyjściowej krzywej, powiedzmy, $\gamma : [a, b] \to U$. Wówczas po pierwsze, z definicji,

$$\int_\Gamma \omega = \int_{[a,b]} \gamma^*\omega \ .$$

Ponadto $\phi^{-1}(\gamma) : [a,b] \to V$ jest parametryzacją krzywej $\Phi^{-1}(\Gamma)$, a zatem, z definicji,

$$\int_{\Phi^{-1}(\Gamma)} \Phi^*\omega = \int_{[a,b]} (\Phi^{-1}(\gamma))^*\Phi^*\omega \ .$$

Na koniec łatwo zauważyć, że dla dowolnej pary odwzorowań $\Psi : W \to V$ i $\Phi : V \to U$ mamy $\Psi^*(\Phi^*\omega) = (\Phi(\Psi))^*\omega$, skąd $(\Phi^{-1}(\gamma))^*\Phi^*\omega = \gamma^*(\Phi^{-1})^*\Phi^*\omega = \gamma^*\omega$, czyli

$$\int_{\Phi^{-1}(\Gamma)} \Phi^*\omega = \int_{[a,b]} (\Phi^{-1}(\gamma))^*\Phi^*\omega = \int_{[a,b]} \gamma^*\omega = \int_\Gamma \omega \ .$$

$\square$

**Zadanie 3.** Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ po łuku elipsy $E = \{(2\cos t, 3\sin t) \mid t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$.

*Rozwiązanie:*

$$\gamma : t \longmapsto (2\cos t, 3\sin t) \ .$$

Zauważmy, że $\dot\gamma(t) = [-2\sin t, 3\cos t]$, zatem używając standardowego wzoru mamy

$$\int_E \omega = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{2\cos t(-2\sin t) + 3\sin t(3\cos t)}{4\cos^2 t + 9\sin^2 t}\mathrm{d}t = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{5\sin t\cos t}{4+5\sin^2 t}\mathrm{d}t =$$

$$\left| u = 4+5\sin^2 t,\ \mathrm{d}u = 10\sin t\cos t\mathrm{d}t \right| = \int_4^9 \frac{\mathrm{d}u}{2u} = \frac{1}{2}\ln u\Big|_4^9 = \ln 3 - \ln 2 \ .$$

Sposób 2. Skorzystamy z wyników poprzedniego zadania: we współrzędnych biegunowych nasza forma przyjmuje postać $\frac{\mathrm{d}r}{r} = \mathrm{d}(\ln r)$, jest zatem dokładna. Wobec tego

$$\int_E \omega = \int_{\Phi^{-1}(E)} \Phi^*\omega = \int_{\Phi^{-1}(E)} \mathrm{d}(\ln r) = \ln r\Big|_{\text{początek}}^{\text{koniec}} \ .$$

Łatwo zauważyć, ze współrzędne biegunowe punktu początkowego krzywej $(2\cos 0, 3\sin 0) = (2,3)$ to $r = 2$ oraz $\phi = 0$, zaś punktu końcowego $(2\cos\frac{\pi}{2}, 3\sin\frac{\pi}{2}) = (0,3)$ to $r = 3$ oraz $\phi = \frac{\pi}{2}$. Zatem wartość szukanej całki wynosi $\ln 3 - \ln 2$.

---

`Zadania domowe na 21 maja:`

**Zadanie 4.** Rozważmy funkcje $f, g \in C^\infty(U)$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym. Wykaż, że następujące 1-formy są równe

$$d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg \ .$$

**Zadanie 5.** Znajdź pullback $\Phi^*\omega$ dla $\Phi(u,v) = (uv, u^2, 3u+v)$, $\omega = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z$.

**Zadanie 6.** Rozważmy odwzorowania $\Psi : W \to V$, $\Phi : V \to U$ i 1-formę $\omega \in \Omega^1(U)$. Wykaż, że

$$\Psi^*(\Phi^*\omega) = (\Phi(\Psi))^*\omega \ .$$

(Składanie cofnięć to cofnięcie przez złożenie.)