AM II.2 2019/20 (gr 3)

13. ćwiczenia zdalne – 14 maja 2020.
Całka z formy różniczkowej wzdłuż krzywej, zamkniętość a dokładność

Zadanie 1. Wykaż, że wartość całki $\int_\gamma \omega$ nie zależy od wyboru konkretnej parametryzacji krzywej γ.

Rozwiązanie: Rozważmy parametryzację $\gamma : [a, b] \to R^n$ i dyfeomorfizm $\phi : [c, d] \to [a, b]$. Dający nową parametryzację $\eta(s) = \gamma(\phi(s))$. Mamy

$$\int_\gamma \omega = \int_c^d \omega(\eta(s))[\dot\eta(s)]\ \mathrm{d}s = \int_c^d \omega(\gamma(\phi(s)))[\dot\gamma(\phi(s))\phi'(s)]\ \mathrm{d}s = \int_c^d \omega(\gamma(\phi(s)))[\dot\gamma(\phi(s))]\ \phi'(s)\ \mathrm{d}s =$$

$$\Big| t = \phi(s),\ \mathrm{d}t = \phi'(s)\mathrm{d}s \Big| = \pm \int_a^b \omega(\gamma(t))[\dot\gamma(t)]\ \mathrm{d}t\ ,$$

gdzie znak $\pm$ zależy od tego czy reparametryzacja ϕ zachowuje orientację, czy też nie.

Zadanie 2. Oblicz całkę z formy $\omega = (x + y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y$ wzdłuż elipsy $E = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ z orientacją przeciwną do ruchu wskazówek zegara.
Zadanie 3. Sprawdź, że forma $\omega = (x + y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y$ jest zamknięta (spełnia warunek konieczny dokładności). Znajdź funkcję f taką, że $\mathrm{d}f = (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$.
Zadanie 4. Oblicz całkę z formy $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ po okręgu $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
Zadanie 5. Wykaż, że forma $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ nie jest *dokładna* (to znaczy, że nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taka, że $\omega = \mathrm{d}f$), ale jest zamknięta, tzn. spełnione są warunki konieczne dla dokładności ω – pochodne cząstkowe $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x$ i $\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)'_y$ są równe.
Rozwiązanie:

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{-1}{x^2+y^2} + (-1)\frac{-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2 - (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 + y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{oraz}$$
$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{1}{x^2+y^2} + (-1)\frac{x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 + y^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$

a więc mamy zamkniętość formy θ. Z drugiej strony wiemy, że $\int_{S^1} \theta = \pm 2\pi$, a więc nie może to być forma dokładna.
Zadanie 6. Wykaż, że forma $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ jest dokładna w $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \le 0\}$ i znajdź jakąś jej funkcję pierwotną.

Rozwiązanie: Rozwiązujemy standardowo – szukamy $f(x, y)$ spełniającego warunki

$$f'_x = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{oraz} \quad f'_y = \frac{x}{x^2+y^2}\ ,$$

skąd dość łatwo otrzymamy $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$. Chwila namysłu pozwala stwierdzić, że

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{dla } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0 \text{ i } y > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Jest funkcją pierwotną. Można zaobserwować skok o 2π przy przejściu przez usuniętą półprostą, co daje inny dowód własności $\int_{S^1} \theta = \pm 2\pi$.

`Zadania domowe na 19 maja:`

Zadanie 7. Oblicz całkę z formy $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ po dowolnym okręgu nie zawierającym zera w swoim wnętrzu.

Zadanie 8. Oblicz całkę z $\omega = (1 + \sin y)\mathrm{d}x + (2y + x\cos y)\mathrm{d}y$ wzdłuż krzywej $\gamma(t) = (t, \sin^2 t)$, gdzie $t \in [0, 4\pi]$ zorientowanej w kierunku rosnącego t.
