AM II.2 2019/20 (gr 3)

12. ćwiczenia zdalne – 7 maja 2020.
Wprowadzenie do form różniczkowych

Jedno-formy e_i^* tworzone przez bazę dualną do wybranej bazy standardowej $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ możemy interpretować jako formy $\mathrm{d}x_i$ zdefiniowane przez różniczki i-tych funkcji współrzędnościowych $f(\boldsymbol{x}) = x_i$, tj.

$$\mathrm{d}x_i[\boldsymbol{v}] = v_i \ .$$

Wynika stąd, że każdy element $\omega \in \Omega^1(U)$ możemy jednoznacznie przedstawić jako kombinację

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 + f_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 + \ldots f_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n \ ,$$

gdzie $f_i : U \to \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi. Od tej pory o 1-formach możemy myśleć jak o napisach takiej postaci.

Zadanie 1. Rozważmy funkcję gładką $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$. Przedstaw 1-formę $\mathrm{d}f$ w postaci

$$g_1\mathrm{d}x_1 + g_2\mathrm{d}x_2 + \ldots + g_n\mathrm{d}x_n \ ,$$

gdzie $g_i : U \to \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi.

Rozwiązanie: Mamy

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\ v_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}x_i[\boldsymbol{v}] = \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i\right)[\boldsymbol{v}] \ ,$$

a zatem

$$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i, \qquad \text{czyli} \qquad g_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \ .$$

Powstaje pytanie, czy każda 1-forma w $U \subset \mathbb{R}^n$ jest postaci $\omega = \mathrm{d}f$ dla pewnej funkcji gładkiej $f \in C^\infty(U)$? O takiej formie będziemy mówili, że jest dokładna, *a odpowiadającą jej funkcję f nazwiemy* funkcją pierwotną *formy ω.*

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy 1-forma $\eta = \mathrm{d}x + (x\cos y - 2y)\mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ ma funkcję pierwotną?

Poprzednie zadanie możemy uogólnić w następujący sposób.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli forma $\omega = g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ jest dokładna (tzn. $\omega = \mathrm{d}f$ dla pewnej funkcji gładkiej), wówczas $g'_y = h'_x$.

O formach spełniających powyższy warunek konieczny dokładności będziemy mówili, że są zamknięte. *Po wprowadzeniu pojęcia różniczki zewnętrznej będziemy mówili ogólniej, że forma ω jest zamknięta, gdy* $\mathrm{d}\omega = 0$. ***Każda forma dokładna jest zamknięta****. Naturalnie jest zapytać się, czy prawdziwe jest stwierdzenie odwrotne. Okazuje się, że nie, a odpowiedź zależy od topologii rozpatrywanej przestrzeni.*

Relacjami między dokładnością a zupełnością form różniczkowych zajmuje się teoria kohomologii de Rhama.

Zadanie 4. Czy forma

$$\omega = (1 + \sin y)\mathrm{d}x + (x\cos y - 2y)\mathrm{d}y$$

jest zamknięta? Czy jest dokładna? Jeśli tak to jak wyglądają wszystkie funkcje pierwotne formy ω?

Rozwiązanie: Łatwo sprawdzić, że $(1 + \sin y)_y = \cos y = (x\cos y - 2y)_x$, a więc forma jest zamknięta. Zastanówmy się teraz nad dokładnością. Jeśli $\omega = \mathrm{d}f$ wówczas musielibyśmy mieć

$$f'_x = 1 + \sin y \quad \text{oraz} \quad f'_y = x\cos y - 2y \ .$$

Traktując każde z tych równań z osobna jako równanie różniczkowe jednej zmiennej widzimy, że potencjalne rozwiązanie $f(x, y)$ musi być postaci $f(x, y) = x + x\sin y + h(y)$ oraz jednocześnie postaci $x\sin y - y^2 + g(x)$, skąd

$$f(x, y) = x + x\sin y - y^2 + C \ .$$

Definicja. Rozważmy 1-wymiarową podrozmaitość $\Gamma \subset U \subset \mathbb{R}^n$ zorientowaną i 1-formę $\omega \in \Omega^1(U)$. *Całką z formy ω po Γ* nazywamy liczbę

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))[\dot\gamma(t)]\mathrm{d}t \ ,$$

gdzie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ jest dowolną parametryzacją podrozmaitości Γ zgodną z orientacją.

Uwagi:

1. *Przez orientację krzywej intuicyjnie rozumiemy wybór kierunku, w którym poruszamy się po niej od jej punktu początkowego do końcowego. Formalnie orientacja krzywej to wybór nigdzie nieznikającego pola wektorów stycznych, przy czym dwa wybory uznajemy za równoważne, gdy jeden jest przeskalowaniem drugiego przez funkcję stale dodatnią.*
2. *Parametryzacja krzywej $\gamma : [a, b] \to \Gamma \subset U$ jest zgodna z jej wybraną orientacją, gdy pole wektorów stycznych $\dot\gamma(t)$ jest polem o którym mowa wyżej. Albo prościej, jeśli $\gamma(a)$ jest ustalonym początkiem, a $\gamma(b)$ końcem krzywej.*
3. *Wartość $\int_\Gamma \omega$ nie zależy od wyboru parametryzacji γ.*
4. *Zmiana orientacji zmienia znak całki na przeciwny $\int_\Gamma \omega = -\int_{\Gamma'} \omega$.*

Jeśli $\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_i f_i(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x^i$, gdzie $f_i \in C^\infty(U)$, wówczas

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \sum_i f_i(\gamma(t))\dot x_i(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \mathrm{d}t \ ,$$

gdzie $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ zaś $F(\boldsymbol{x}) := (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}))$. Innymi słowy, możemy interpretować $\int_\Gamma \omega$ jako pracę siły F wykonywaną wzdłuż krzywej Γ. Przy takiej interpretacji widać rolę orientacji – zależnie od tego w którą stronę po krzywej się poruszamy, albo siła wykonuje pracę za nas, albo my musimy pracować przeciw danej sile.

Definicja. Powiemy, że forma $\omega \in \Omega^1(U)$ ma *własność niezależności całki od drogi*, gdy dla każdych dwóch krzywych zorientowanych $\Gamma, \Gamma' \subset U$ o wspólnych początkach i końcach zachodzi

$$\int_\Gamma \omega = \int_{\Gamma'} \omega \ .$$

Idąc za duchem interpretacji fizycznej – formy które mają powyższą własność odpowiadają siłom zachowawczym.

`Zadanie domowe na 14 maja:`

Zadanie 5. Wykaż, że każda forma dokładna ma własność niezależności całki od drogi, dokładniej dla krzywej $\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ zachdzi

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \ .$$