AM II.2 2019/20 (gr 3)

11. ćwiczenia zdalne – 5 maja 2020. Miara powierzchniowa, wprowadzenie do form różniczkowych

Zadanie 1. Korzystając z wyników zadania domowego i reguły Papussa-Guldina oblicz całkę z zadania 3 z poprzednich ćwiczeń.

Zadanie 2. Oblicz miarę powierzchniową torusa $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = R^2, z^2 + t^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^4$.

Rozwiązanie: Rozważmy parametryzację torusa

$$\Phi : (\alpha, \beta) \longmapsto (R\cos\alpha, R\sin\alpha, r\cos\beta, r\sin\beta) \ ,$$

gdzie $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$. Mamy $\boldsymbol{v}_1 := \mathrm{d}\Phi[e_\alpha] = [-\sin\alpha, \cos\alpha, 0, 0]$ oraz $\boldsymbol{v}_2 := \mathrm{d}\Phi[e_\beta] = r[0, 0, -\sin\beta, \cos\beta]$, skąd $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle = R^2$, $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = 0$ oraz $\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\rangle = r^2$. Stąd już łatwo wyliczymy, że odpowiedni wyznacznik Gramma równy $r \cdot R$. Zatem

$$\sigma_2(T) = \int_{(0,2\pi)^2} r \cdot R \ \mathrm{d}^2(\alpha\beta) = 2\pi R \cdot 2\pi r \ .$$

Co ciekawe dostaliśmy taki sam wynik jak dla torusa w $\mathbb{R}^3$!

Zadanie 3. Oblicz średnią wartość funkcji $f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, OZ)^2$ na torusie a $\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = R^2, z^2 + t^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^4$.

Rozwiązanie: Średnia wartość funkcji f na torusie to

$$\langle f\rangle_{\mathbb{T}^2} = \frac{1}{\sigma_2(\mathbb{T}^2)} \int_{\mathbb{T}^2} f \ \mathrm{d}\sigma_2 \ ,$$

a więc musimy scałkować rozważaną funkcję po torusie i następnie podzielić przez jego całkowitą miarę, która jak już wiemy wynosi $\sigma_2(\mathbb{T}^2) = 4\pi^2 Rr$.

Pozostaje policzyć odpowiednią całkę. Będziemy korzystali z użytej poprzednio parametryzacji

$$\Phi : (\alpha, \beta) \longmapsto (R\cos\alpha, R\sin\alpha, r\cos\beta, r\sin\beta) \ ,$$

gdzie $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$. Jak już wiemy odpowiedni pierwiastek z wyznacznika Gramma wynosi $R \cdot r$. Nasza funkcja to oczywiście $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + t^2$, a zatem w parametryzacji $f(\Psi(\alpha, \beta)) = R^2 + r\sin^2\beta$. Pozostaje przeprowadzić rachunek

$$\int_{\mathbb{T}^2} f \ \mathrm{d}\sigma_2 = \int_{(0,2\pi)^2} f(\Psi(\alpha, \beta)) \ \sqrt{G_\Psi(\alpha, \beta)} \ \mathrm{d}^2(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R^2 + r^2 \sin^2\beta) Rr \ \mathrm{d}\alpha \ \mathrm{d}\beta = \ldots =$$
$$4\pi^2 Rr \left(R^2 + \frac{r^2}{2}\right) \ .$$

Ostateczenie $\langle f\rangle_{\mathbb{T}^2} = R^2 + \frac{r^2}{2}$.

Na marginesie drobna uwaga. Można zadać pytanie, czy rozważana funkcja f jest mierzalna/całkowalna względem miary powierzchniowej σ_2 na torusie. Definicja miary powierzchniowej, którą mamy używa parametryzacji (w tym przypadku Φ) – sprowadzając całkę powierzchniową do zwykłej całki Lebesgue'a z $f(\Phi) \cdot \sqrt{G_\Phi}$ w dziedzinie parametryzacji. Zatem mierzalność/całkowalność funkcji f względem miary powierzchniowej sprowadza się do pytania czy funkcja $f(\Phi(\alpha, \beta)) \cdot \sqrt{G_\Phi(\alpha, \beta)}$ jest mierzalna/całkowalna w zwykłym sensie w $(0, 2\pi)^2 \ni (\alpha, \beta)$.

Definicja. Niech $U \subset \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie zbiorem otwartym. *Jedno-formą na U* nazywamy rodzinę odwzorowań liniowych $\omega(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładko indeksowaną punktami zbioru U. Innymi słowy, 1-forma to funkcja $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gdzie zależność od $\boldsymbol{x} \in U$ jest gładka, a zależność od $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ jest liniowa (dla każdego ustalonego $\boldsymbol{x}$). (Dobrze jest myśleć, że $\omega(\boldsymbol{x})$ to odwzorowanie liniowe na przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_{\boldsymbol{x}} U \simeq \mathbb{R}^n$.) Piszemy zwyczajowo $\langle \omega(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle$ albo $\omega(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}]$. Zbiór wszystkich jedno-form na U oznaczmy symbolem $\Omega^1(U)$.

Przykład. Rozważmy standardową bazę $e_1, e_2, \ldots, e_n$ w $\mathbb{R}^n$ i odpowiadającą jej bazę dualnę $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$. Elementy e_i^* są jedno-formami w $\mathbb{R}^n$ (trywialne zależnymi od punktu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$). Mamy bowiem

$$e_i^*(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{v}] = v_i, \quad \text{gdzie } \boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n].$$

Ogólniej każdy element $\omega \in \Omega^1(U)$ możemy jednoznacznie przedstawić jako kombinację

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}) \cdot e_1^* + f_2(\boldsymbol{x}) \cdot e_2^* + \ldots f_n(\boldsymbol{x}) \cdot e_n^* \ ,$$

gdzie $f_i : U \to \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi.

Przykład. Rozważmy funkcję gładką $f \in C^\infty(U)$. Jej pochodną $\mathrm{d}f$ w punkcie $\boldsymbol{x} \in U$ definiowaliśmy jako przekształcenie liniowe $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) : \mathrm{T}_{\boldsymbol{x}} U \to \mathbb{R}$. Wobec tego jest to naturalny (i najważniejszy) przykład jedno-formy na U. Zwyczajowo oznaczmy ją symbolem $\mathrm{d}f$.

`Zadanie domowe na 7 maja 2020:`

Zadanie 4. Rozważmy funkcję $f(\boldsymbol{x}) = x_i$, która punktowi $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ przyporządkowuje jego i-tą współrzędną. Wykaż, że odpowiadająca jej 1-forma $\mathrm{d}f$ to e_i^*.
