AM II.2 2019/20 (gr 3)

10. ćwiczenia zdalne – 30 kwietnia 2020. Miara powierzchniowa

Zadanie 1. Rozważmy funkcję gładką $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ i niech Σ będzie powierzchnią 2-wymiarową powstałą przez obrót wykresu funkcji f wokół osi $0X$. Znajdź wzór na pole Σ.

I reguła Pappusa-Guldina. *Dla powierzchni Σ powstałej z obrotu wykresu funkcji f z poprzedniego zadania jej pole wynosi*

$$\sigma_2(\Sigma) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x = 2\pi l \cdot \langle R \rangle \ ,$$

gdzie $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$ to długość wykresu, zaś $\langle R \rangle = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$ to odległość środka masy wykresu od osi obrotu.

Zadanie 2. Przestaw wycinek sfery $S^2(\mathbf{0}, R) \subset \mathbb{R}^3$ ograniczony płaszczyznami $z = a$ i $z = b$, gdzie $a, b \in [-R, R]$ jako powierzchnię powstałą przez obrót wykresu pewnej funkcji wokół osi OZ. Korzystając z reguły Papusa-Guldina oblicz pole tej powierzchni.

Zadanie 3. Połączmy odcinkiem punkt $(\cos\phi, \sin\phi, -1)$ okręgu $\{x^2+y^2 = 1, z = -1\}$ z punktem $\left(\cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), 1\right)$ okręgu $\{x^2+y^2 = 1, z = 1\}$. Zbiór M definiujemy jako sumę wszystkich takich odcinków bez końców. Wykaż, że M jest rozmaitością 2-wymiarową w $\mathbb{R}^3$ i oblicz całkę

$$\int_M |z|\mathrm{d}\sigma_2(z) \ .$$

Rozwiązanie: Łatwo wypisać parametryzację M:

$$\Phi : (t, \phi) \longmapsto \left(t\cos\phi + (1-t)\cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), t\sin\phi + (1-t)\sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), -t + (1-t)\right)$$

lub w bardziej zwartej formie

$$\Phi : (t, \phi) \longmapsto (t\cos\phi - (1-t)\sin\phi, t\sin\phi + (1-t)\cos\phi, 1 - 2t) \ .$$

Mamy

$$e_1 := \mathrm{d}\Phi(t, \phi)[e_t] = [\cos\phi + \sin\phi, \sin\phi - \cos\phi, -2] \quad \text{oraz}$$
$$e_2 := \mathrm{d}\Phi(t, \phi)[e_\phi] = [-t\sin\phi - (1-t)\cos\phi, t\cos\phi - (1-t)\sin\phi, 0]$$

Skąd łatwo uzyskamy $\langle e_1, e_1\rangle = 6$, $\langle e_1, e_2\rangle = -1$ oraz $\langle e_2, e_2\rangle = (1-t)^2+t^2$, a więc odpowiedni wyznacznik Gramma wynosi $\sqrt{6(1-t)^2 + 6t^2 - 1} = \sqrt{12\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2}$. Ostatecznie

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |1 - 2t|\sqrt{12\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2}\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\phi = 4\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 2\left(t - \frac{1}{2}\right)\sqrt{12\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2}\ \mathrm{d}t =$$
$$\left|s = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2, \mathrm{d}s = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\right| = 4\pi\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{12\cdot s + 2}\mathrm{d}s = 4\pi\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{12}\cdot(12s + 2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{2\pi}{9}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) \ .$$

Inny sposób. Możemy rozważany zbiór potraktować jako powierzchnię powstałą przez obrót wykresu funkcji $f(t) = \sqrt{t^2 + (1-t)^2}$, gdzie $z = 1 - 2t$ i $t \in (0,1)$ wokół osi OZ. Istotnie zauważmy, że

$$t\cos\phi - (1-t)\sin\phi = \sqrt{t^2+(1-t)^2}\left(\frac{t}{\sqrt{\cdots}}\cos\phi - \frac{(1-t)}{\sqrt{\cdots}}\sin\phi\right) = \sqrt{t^2+(1-t)^2}\cos(\phi+\phi_0)$$
$$t\sin\phi + (1-t)\cos\phi = \sqrt{t^2+(1-t)^2}\left(\frac{t}{\sqrt{\cdots}}\sin\phi + \frac{(1-t)}{\sqrt{\cdots}}\cos\phi\right) = \sqrt{t^2+(1-t)^2}\sin(\phi+\phi_0)\ ,$$

gdzie $\cos\phi_0 = \frac{t}{\sqrt{t^2+(1-t)^2}}$ i $\sin\phi_0 = \frac{(1-t)}{\sqrt{t^2+(1-t)^2}}$. Po zamianie zmiennych $z = 1 - 2t$ dostajemy $f(z) = \sqrt{\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}}$, skąd $f'(z) = \frac{z}{2f(z)}$.
Korzystając ze wzoru na pole powierzchni obrotowej pozostaje policzyć całkę

$$\begin{aligned} I =& 2\pi\int_{-1}^{1}|z|f(z)\cdot\sqrt{1+f'(z)^2}\mathrm{d}z = 2\pi\int_{-1}^{1}|z|f(z)\sqrt{1+\frac{z^2}{4f(z)^2}}\mathrm{d}z = 2\pi\int_{-1}^{1}|z|\sqrt{f(z)^2+\frac{z^2}{4}}\mathrm{d}z = \\ & 2\pi\int_{-1}^{1}|z|\sqrt{\frac{3z^2}{4}+\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}z = 4\pi\int_{0}^{1}z\sqrt{\frac{3z^2}{4}+\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}z = \ldots = \frac{2\pi}{9}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})\ . \end{aligned}$$

`Zadania domowe na 5 maja:`

Zadanie 4. Przedstaw powierzchnię rozpatrywaną w ostatnim zadaniu jako powierzchnię powstałą przez obrót pewnej funkcji wokół osi z.
