AM II.2 2019/20 (gr 3)

1. ćwiczenia zdalne – 12 marca 2020.

Na początku dokończmy robić ostatnie zadanie z poprzednich ćwiczeń innym sposobem. Przypomnę, że mieliśmy pomysł aby zastosować pewną zamianę zmiennych, która uprości naszą całkę (i funkcję i zbiór). Można to zrobić nieco prościej niż zaczął ostatnio Pan Juranda. Wskazówka dla Państwa: gdyby napisać, że $x - y = z$ i $x + y = t$ to i funkcja i zbiór wyglądałyby prościej. Proszę odzyskać z tych dwóch równań x i y jako funkcję z i t (a więc zamianę zmiennych $(x, y) = \Phi(z, t)$) i zastosować twierdzenie o zamianie zmiennych.

Zadanie 1. Oblicz całkę

$$\int_{\{|x-y|<1\}} \exp(-|x+y|)\mathrm{d}\lambda^2(x,y) \ .$$

A oto kolejne zadanie, w którym właściwe podstawienie powinno istotnie uprościć rachunki. Polecam spróbować znaleźć taką sprytną zamianę i alternatywnie spróbować policzyć też całkę z twierdzenia Fubini'ego bez zamiany zmiennych. Porównanie obu sposobów powinno dać Państwu do myślenia.

Zadanie 2. Oblicz miarę zbioru

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y, \frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2, 1 \leq xy \leq 2\} \ .$$

Obiecałem Państwu podsumowanie o problemie całkowalności funkcji. Tymczasem na wykładzie pojawiły się wreszcie funkcje mierzalne i twierdzenie Tonelli'ego, w związku z czym postanowiłem że kwestiom mierzalności i całkowalności poświęcimy całe następne ćwiczenia, żeby teraz nie mieszać Państwu w głowach.

Profesor Mormul prosił o policzenie na ćwiczeniach n-wymiarowej miary Lebesgue'a zbioru

$$A_{n,p} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x_1|^p + |x_2|^p \ldots + |x_n|^p \leq 1\} \ ,$$

a więc kuli jednostkowej w p-normie w $\mathbb{R}^n$. Oznaczmy tą miarę $l_n(A_{n,p}) = \lambda_{n,p}$. Zadanie jest dość pracochłonne, więc zrobimy je w kilku etapach. Zacznijmy od przypomnienia własności funkcji Γ.

Zadanie 3. (Funkcja Γ i jej własności.) Funkcję Γ definiujemy wzorem

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\mathrm{d}t \ .$$

Pokaż, że

(a) $\Gamma(1) = 1$,

(b) $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a)$,

(c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Aby umotywować wprowadzenie kolejnej funkcji specjalnej policzmy miarę $\lambda_{2,p} = l_2(A_{2,p})$.

Zadanie 4. Wykaż, że

$$\lambda_{2,p} = \frac{4}{p} \cdot \int_0^1 t^{\frac{1}{p}-1}(1-t)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}t \ .$$

Okazało się, że $\lambda_{2,p}$ wyraża się przez tak zwaną funkcję beta. Co ciekawe można ją elegancko wyrazić przez funkcję Γ.

Zadanie 5. (Funkcja beta) Dla liczb rzeczywistych a i b zdefiniujmy funkcję $B(a,b)$ wzorem

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t \ .$$

Wykaż, że zachodzi następująca tożsamość

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \ .$$

Wskazówka*: Policz całkę z funkcji $f(t,s) = t^{a-1} \cdot e^{-t} \cdot s^{b-1} \cdot e^{-s}$ po zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \ni (t,s)$ dwoma sposobami – za pomocą twierdzenia Fubini'ego i za pomocą pewnej zamiany zmiennych (Uwaga: wymyślenie właściwej zamiany zmiennych nie jest zupełnie trywialne – niecierpliwi mogą zajrzeć do podpowiedzi.)*

Teraz mamy już wszystkie narzędzia by policzyć $\lambda_{n,p}$, co zostaje dla Państwa zadaniem domowym :-)

`Zadanie domowe na 19 marca 2020:`

Zadanie 6. Wykaż, że n-wymiarowa miara Lebesgue'a zbioru

$$A_{n,p} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x_1|^p + |x_2|^p \ldots + |x_n|^p \leq 1\} \ ,$$

wynosi

$$\lambda_{n,p} = 2^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)} \ .$$

I jeszcze proste zadanie na twierdzenie Fubini'ego.

Zadanie 7. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1, 0 < x+y < 1, 0 < z < \frac{1}{x+y+1}\}$. Oblicz całkę

$$\int_A \frac{1}{(x+y+1)^2} \mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) \ .$$

Wskazówki

- **Zadanie 2**: zamień to co brzydkie ($\frac{x}{y}$ i xy) na coś ładniejszego (na przykład nowe zmienne z i t) i zobacz jakiej zamianie zmiennych $(z,t) \mapsto (x,y)$ to odpowiada.
- **Zadanie 3**: (b) Całkowanie przez części, (c) Użyj odpowiedniej zamiany zmiennych, by sprowadzić do całki z e^{-x^2}.
- **Zadanie 4**: użyj twierdzenia Fubini'ego.
- **Zadanie 5**: podstaw $s+t=w$ oraz $t=zw$ i odczytaj z tego zamianę zmiennych $t=t(w,z)$, $s=s(w,z)$.
- **Zadanie 6**: przeprowadź dowód przez indukcję po n korzystając z twierdzenia Fubini'ego, podobnie jak przy liczeniu $\lambda_{2,p}$.
- **Zadanie 7**: wykonaj kolejno całkowania po z, y i x.