AM II.2 2019/20 (gr 3).
Zadania przygotowawcze do egzaminu

Aktualizacja: 16 czerwca 2020

1 Podstawy – własności arytmetyczne, pullback, różniczka zewnętrzna

Zadanie 1. Zapisz następujące 1-formy w bazie $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$:

a) $x\ \mathrm{d}(\sin(x^2y)) + y\ \mathrm{d}(\cos(xy^2))$,

b) $\exp(-x-y+z)\ \mathrm{d}(\exp(x+y+z))$,

c) $\mathrm{d}(x\ \cos y\ \cos z)$

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli $\eta \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ to $\eta \wedge \eta = 0$. Podaj przykład 2-formy $\nu \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ takiej, że $\nu \wedge \nu \neq 0$.

Zadanie 3. Rozstrzygnij, czy następujące 1-formy są zamknięte/dokładne i ewentualnie znajdź funkcje pierwotne.

a) $\omega = \cos(x+y)\mathrm{d}x + \cos(x+y)\mathrm{d}y$,

b) $\omega = \frac{2xy}{1+x^4y^2}\mathrm{d}x + \frac{x^2}{1+x^4y^2}\mathrm{d}y$,

c) $\omega = 2xy\exp(x^2y)\mathrm{d}x + x^2\exp(x^2y)\mathrm{d}y$,

d) $\omega = x^3\mathrm{d}x + (y^5 + x^2)\mathrm{d}y$.

Zadanie 4. Oblicz pullback $\Phi^*\omega$ dla:

a) $\omega = xy\ \mathrm{d}x + 2z\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}z$ i $\Phi(u,v) = (uv, u^2, 3u+v)$,

b) $\omega = 4x\mathrm{d}x + 9y\ \mathrm{d}y$ i $\Phi(r,\phi) = (3r\cos\phi, 2r\sin\phi)$,

c) $\omega = x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x$ i $\Phi(r,\phi) = (3r\cos\phi, 2r\sin\phi)$.

Zadanie 5. Oblicz różniczkę zewnętrzną form

a) $\sum_{i=1}^n (-x_i)^{i+1}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$.

b) $\det \mathrm{d}F(x_1, x_2)\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, gdzie $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest odwzorowaniem gładkim.

c) $f_1(x_1, x_3)\ \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 + f_2(x_1, x_2)\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + f_3\ (x_2, x_3)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$, gdzie $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ to funkcje gładkie.

d) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(f\partial_k g - g\partial_k f)\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \mathrm{d}x_{k-1} \wedge \mathrm{d}x_{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, gdzie $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi.

Zadanie 6. Czy forma

$$\omega = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y$$

jest zamknięta/dokładna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$?

Zadanie 7. Dla wektora $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ definiujemy formę $\omega_{\boldsymbol{a}} := a_1\ \mathrm{d}x_1 + a_2\ \mathrm{d}x_2 + a_3\ \mathrm{d}x_3$. Wykaż że $\omega_{\boldsymbol{a}} \wedge \omega_{\boldsymbol{b}} = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są liniowo zależne.

Zadanie 8. Dla wektora $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ definiujemy formę $\omega_{\boldsymbol{a}} := a_1\ \mathrm{d}x_1 + a_2\ \mathrm{d}x_2 + a_3\ \mathrm{d}x_3$. Rozważmy teraz dowolną 1-formę α w $\mathbb{R}^3$ i niech

$$\omega_{\boldsymbol{a}} \wedge \alpha = c_1\ \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + c_2\ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + c_3\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\ .$$

Wykaż, że wektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ jest prostopadły do $\boldsymbol{a}$.

Zadanie 9. Dla pola wektorowego $\boldsymbol{F} = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiujemy 1-formę $\omega_{\boldsymbol{F}} := f\ \mathrm{d}x_1 + g\ \mathrm{d}x_2 + h\ \mathrm{d}x_3$ oraz 2-formę $\eta_{\boldsymbol{F}} := f\ \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + g\ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + h\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$. Oblicz różniczkę zewnętrzną form $\omega_{\boldsymbol{F}}$ i $\eta_{\boldsymbol{F}}$ oraz $\omega_{\boldsymbol{G}}$ i $\eta_{\boldsymbol{G}}$ dla pól wektorowych $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [x, y, z]$ oraz $\boldsymbol{G}(x, y, z) = [\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{y}{x}]$.
(*W klasycznym języku*: Oblicz rotację i dywergencję pól $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [x, y, z]$ oraz $\boldsymbol{G}(x, y, z) = [\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{y}{x}]$.)

Zadanie 10. Rozważmy formę $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}w \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$. Rostrzygnij, czy istnieją 1-formy $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ takie, że $\omega = \alpha \wedge \beta$?

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. *Rozwiązanie:* a)$(\cos(x^2y)2x^2y - \sin(xy^2)y^3)\mathrm{d}x + (\cos(x^2y)x^3 - \sin(xy^2)2xy^2)\mathrm{d}x$;
b) $e^{2z}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$;
c) $\cos y \cos z\ \mathrm{d}x - x \sin y \cos z\ \mathrm{d}y - x \cos y \sin z\ \mathrm{d}z$.

Zadanie 2. *Rozwiązanie:* Łatwo zauważyć, że $\eta \wedge \eta$ byłoby 4-formą w $\mathbb{R}^4$, co jest niemożliwe. Inny sposób: iloczyn dowolnych dwóch pośród 2-form bazowych $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z\}$ daje zero. Przykład w $\mathbb{R}^4 \ni (x, y, z, t)$ to $\eta = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t$. Wówczas

$$\eta \wedge \eta = 2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t\ .$$

Zadanie 3. *Rozwiązanie:* a), b), c) formy są i zamknięte i dokładne. Funkcje pierwotne to, odpowiednio: $\sin(x + y)$, $\mathrm{arctg}(x^2y)$ i $\exp(x^2y)$. d) $\mathrm{d}\omega = 2x\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \neq 0$ – forma nie jest zamknięta, więc też nie jest dokładna.

Zadanie 4. *Rozwiązanie:* a) $(u^3v^2 + 9u^2 + 4uv)\mathrm{d}u + (u^4v - u^2)\mathrm{d}v$, b) $36r\ \mathrm{d}r$, c) $6r^2\ \mathrm{d}\phi$.

Zadanie 5. *Rozwiązanie:* a) $\left[\sum_{i=1}^{n}(i+1)(x_i)^i\right]\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, b) 0 – rozważana forma to $\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2$, c) 0, d) $\left[f(\sum_k \partial_k^2 g) - g(\sum_k \partial_k^2 f)\right]\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$.

Zadanie 6. *Rozwiązanie:* Forma jest i dokładna i zamknięta: $\omega = \mathrm{d}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$.

Zadanie 7. *Rozwiązanie:* Sposób 1. Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$\omega_{\boldsymbol{a}} \wedge \omega_{\boldsymbol{b}} = (a_2\ b_3 - a_3\ b_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + (a_3\ b_1 - a_1\ b_3)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + (a_1\ b_2 - b_1\ a_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\ ,$$

skąd $\omega_{\boldsymbol{a}} \wedge \omega_{\boldsymbol{b}} = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy równe są proporcje $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.
Sposób bardziej geometryczny. Wprowadźmy oznaczenia: $\omega_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}\rangle$ oraz $\eta_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\rangle$. Zatem $\omega_{\boldsymbol{a}} = a_1\ \mathrm{d}x_1 + a_2\ \mathrm{d}x_2 + a_3\ \mathrm{d}x_3$ oraz $\eta_{\boldsymbol{a}} = a_1\ \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + a_2\ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_3\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$. Zauważmy, że wówczas $\omega_{\boldsymbol{a}} \wedge \omega_{\boldsymbol{b}} = \eta_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}$. Oczywiście $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są współliniowe.

Zadanie 8. *Rozwiązanie:* Sposób 1. Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, przyjmując na przykład $\alpha = b_1\ \mathrm{d}x_1 + b_2\ \mathrm{d}x_2 + b_3\ \mathrm{d}x_3$ wówczas

$$\omega \wedge \alpha = (a_2\ b_3 - a_3\ b_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + (a_3\ b_1 - a_1\ b_3)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + (a_1\ b_2 - b_1\ a_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\ ,$$

skąd

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\rangle = a_1(a_2\ b_3 - a_3\ b_2) + a_2(a_3\ b_1 - a_1\ b_3) + a_3(a_1\ b_2 - b_1\ a_2) = \ldots = 0\ .$$

Sposób bardziej geometryczny. Wprowadźmy oznaczenia: $\omega_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}\rangle$ oraz $\eta_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\rangle$. Zatem $\omega_{\boldsymbol{a}} = a_1\ \mathrm{d}x_1 + a_2\ \mathrm{d}x_2 + a_3\ \mathrm{d}x_3$ oraz $\eta_{\boldsymbol{a}} = a_1\ \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + a_2\ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_3\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$. Zauważmy, że wówczas $\omega_{\boldsymbol{a}} \wedge \omega_{\boldsymbol{b}} = \eta_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}$. A ponieważ każda jedno-forma α w $\mathbb{R}^3$ jest postaci $\alpha = \omega_{\boldsymbol{b}}$ dla pewnego pola wektorowego $\boldsymbol{b}$, mamy $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$.

Zadanie 9. *Rozwiązanie:* *Uzupełnić opis formowy...*

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = [0, 0, 0]$, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} = 3$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{G} = [0, y(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2}), -z(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2})]$; $\mathrm{div}\,\boldsymbol{G} = 0$.

Zadanie 10. *Rozwiązanie:* Nie. Jeśli $\omega = \alpha \wedge \beta$ to $\omega \wedge \omega = \alpha \wedge \alpha \wedge \beta \wedge \beta = 0$ (uwaga: tożsamość $\alpha \wedge \alpha = 0$ zachodzi dla wszystkich form nieparzystego stopnia, ale niekoniecznie dla form parzystego stopnia). Tymczasem $\omega \wedge \omega = 2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}w \neq 0$.

2 Całkowanie form na rozmaitościach, twierdzenie Stokes'a

Zadanie 1. Rozważmy funkcje gładkie jednej zmiennej $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i 1-formę $\omega = f(x)\mathrm{d}x + g(y)\mathrm{d}y + h(z)\mathrm{d}z \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Wykaż, że ω ma własności niezależności całki od drogi.

Zadanie 2. Oblicz całkę

$$\int_C (x^2 - y)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y \ ,$$

gdzie C jest łukiem paraboli $y^2 = 8x$ zorientowanym od punktu $(0, 0)$ do punktu $(2, 4)$.

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_D (x^2 + y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y \ ,$$

gdzie D to łuk paraboli $y^2 = x$ zorientowany od $(1, 1)$ do $(1, -1)$.

Zadanie 4. Oblicz całkę z formy $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ po konturze będącym brzegiem kwadratu:

a) o środku $(3, 3)$ i boku długości 1

b) o środku $(1, 1)$ i boku długości 3.

Zadanie 5. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\begin{cases} x = a\cos^3(t) \\ y = a\sin^3(t) \ , \end{cases}$$

gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

Zadanie 6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 > y, x^4 - xy^2 - y^3 = 0\}$. *Wskazówka*: rozważ punkty krzywej leżące na prostej $y = -tx$.

Zadanie 7. Oblicz całkę z formy $x^3\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ po połówce torusa sparametryzowanej następująco

$$\begin{cases} x = (4 + \cos\alpha)\cos\theta \\ y = (4 + \cos\alpha)\sin\theta \\ z = \sin\alpha \ , \end{cases}$$

gdzie $\alpha \in [0, 2\pi]$ i $\theta \in [0, \pi]$. Przyjmujemy orientację torusa jako brzegu pełnego torusa.

Zadanie 8. Oblicz całkę z 2-formy

$$\omega = (y^2 - x^2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (z - x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (2xz - y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

po powierzchni M powstałej w wyniku obrotu cykloiody opisanej parametrycznie $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 0$, $z(t) = 1 - \cos t$, gdzie $t \in [0, \pi]$ wokół prostej $x = \pi$, $y = 0$. Wektor normalny zewnętrzny do M w punkcie $(\pi, 0, 2)$ to $[0, 0, 1]$.

Zadanie 9. Obliczyć całkę z $(k-1)$-formy

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j x_j \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j-1} \wedge \mathrm{d}x_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k$$

po sferze jednostkowej $S^{k-1}(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^k$, z naturalną orientacją sfery jako brzegu kuli jednostkowej $B^k(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^k$.

Zadanie 10. Dla pola wektorowego $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, 0, 0)$ oraz obszaru $\Omega = [0, 1]^3$, policz niezależnie od siebie całki $\int_{\partial\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ oraz $\int_{\partial\Omega}\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n}\rangle \mathrm{d}\sigma^2$, gdzie $\boldsymbol{n}$ to wektor normalny zewnętrzny.

Zadanie 11. Rozmaitość $M = \{(x, y, z) \mid (x - z)^2 + 4y^2 + (1 - z)^2 = 4\}$ jest zorientowana tak, że strona ujemna jest widoczna z punktu $(0, 0, 0)$. Oblicz całkę z formy $\eta = x\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (y - 1)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (z + 1)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ po rozmaitości M. (W wersji klasycznej: blicz strumień pola wektorowego $\boldsymbol{F}(x, y, z) = [x, y - 1, z + 1]$ przez M.)

Zadanie 12. Rozstrzygnij, czy 2-forma

$$\omega = \frac{(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) \wedge (u\mathrm{d}x - w\mathrm{d}u)}{(x^2 + y^2)(u^2 + w^2)}$$

jest zamknięta? Czy jest dokładna?

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. *Rozwiązanie:* Sposób 1. Rozważmy dowolną drogę w $\mathbb{R}^3$ sparametryzowaną następująco

$$[a,b] \ni t \longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

Wówczas

$$\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} [f(x(t))\dot{x}(t) + g(y(t))\dot{y}(t) + h(z(t))\dot{z}(t)]\,\mathrm{d}t = F(x(t)) + G(y(t)) + H(z(t))\Big|_b^a \ ,$$

gdzie F, G, H oznaczają, odpowiednio, całki nieoznaczone z funkcji f, g i h.
Sposób 2. Forma ω jest zamknięta ($\mathrm{d}\omega = 0$). Rozważmy teraz dowolne dwie drogi γ_1 i γ_2 łączące dwa ustalone punkty $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$. Rozważmy hiperpowierzchnię S rozpiętą między tymi krzywymi, a więc $\partial S = \gamma_1 \cup \overline{\gamma_2}$ (górna kreska oznacza zmienioną orientację – *patrz rysunek – dodać*). Z twierdzenia Stokesa mamy

$$0 = \int_S 0 = \int_S \mathrm{d}\omega = \int_{\partial S} \omega = \int_{\gamma_1 \cup \overline{\gamma_2}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\overline{\gamma_2}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \ ,$$

a więc $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Zadanie 2. *Rozwiązanie:* Odp. $\frac{16}{3}$.

Zadanie 3. *Rozwiązanie:* Odp. -2, wskazówka: $\omega = \mathrm{d}(xy + \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2})$.

Zadanie 4. *Rozwiązanie:* Odp. a) 0, b) 2π. Najprościej zauważyć że we współrzędnych biegunowych (r, ϕ) forma przyjmuje postać $\mathrm{d}\phi$.

Zadanie 5. *Rozwiązanie:* Odp. $\frac{3}{8}\pi$. Wsk. $\cos^4(t)\sin^2(t) = \frac{1}{8}\sin^2(2t)(1 + \cos(2t))$

Zadanie 6. *Rozwiązanie:* Odp. $\frac{1}{210}$.

Zadanie 7. *Rozwiązanie:* Odp. $\frac{201}{2}\pi^2$.

Zadanie 8. *Rozwiązanie:* Odp. 0. Z tw. Stokes'a, $\mathrm{d}\omega = 0$, w związku z czym wystarczy policzyć całkę powierzchniową z ω po dysku $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-\pi)^2 + y^2 = \pi^2, z = 0\}$.

Zadanie 9. *Rozwiązanie:* Odp. $k \cdot \lambda^k(B^k(\mathbf{0}, 1))$. Korzystamy z tw. Stokes'a: $\mathrm{d}\omega = k \cdot \mathrm{vol}$, gdzie $\mathrm{vol} = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$ to standardowa forma objętości w $\mathbb{R}^k$.

Zadanie 10. *Rozwiązanie:* Odp. 1.

Zadanie 11. *Rozwiązanie:* Rozważany zbiór to elipsoida. Z tw. Stokes'a wystarczy policzyć 3 krotną objętość jej wnętrza, co łatwo zrobić zmieniając liniowo zmienne na $t = x - z$, $s = 2y$, $u = 1 - z$.

Zadanie 12. *Rozwiązanie:* Forma jest postaci $\omega = \alpha \wedge \beta$, gdzie $\mathrm{d}\alpha = 0 = \mathrm{d}\beta$. Wobec $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta \pm \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ zachodzi $\mathrm{d}\omega = 0$. Forma nie jest zamknięta: Rozważmy rozmaitość $T = S^1 \times S^2 \subset \mathbb{R}^4$. Wobec $\partial T = \emptyset$ gdyby zachodziło $\omega = \mathrm{d}\eta$ mielibyśmy z Tw. Stokesa $\int_T \omega = \int_T \mathrm{d}\eta = \int_{\partial T} \eta = 0$. Tymczasem $\int_T \omega = \int_{S^1 \times S^1} \alpha \wedge \beta = \int_{S^1} \alpha \cdot \int_{S^1} \beta = \pm(2\pi)^2$.

3 Orientacja

Na początek trochę teorii

Definicja. Rozważmy przestrzeń wektorową V. Na zbiorze baz tej przestrzeni wprowadźmy relację równoważności:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \sim \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

wtedy i tylko wtedy gdy macierz przejścia między tymi bazami ma dodatni wyznacznik.
Orientacją V nazywamy wybór jednej z dwóch klas równoważności powyższej relacji

Definicja. *Orientacją rozmaitości* $N \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy lokalnie zgodny wybór orientacji każdej jej przestrzeni stycznej $\mathrm{T}_p N$, gdzie $p \in N$.
Nie każda rozmaitość daje się zorientować (np. wstęga Möbiusa). Jeśli się da to mówimy o rozmaitości *orientowalnej*. Rozmaitość z konkretnie wybraną orientacją nazywamy *rozmaitością zorientowaną*.

Podstawowe fakty:

1. *Rozmaitość $N \subset \mathbb{R}^n$ klasy C^1 będącą brzegiem rozmaitości n-wymiarowej $M \subset \mathbb{R}^n$ jest orientowalna.*
2. *Jeśli $N \subset \mathbb{R}^n$ jest orientowalna, to podrozmaitość $N' \subset N$ tego samego wymiaru co N również jest orientowalna.*
3. *Rozmaitość orientowalna i spójna ma dokładnie dwie orientacje, wyznaczone przez orientację jednej konkretnej przestrzeni stycznej.*

Sposoby definiowania orientacji *(na rozmaitości k-wymiarowej $N \subset \mathbb{R}^n$ orientowalnej i spójnej):*

1. *Wskazanie wyróżnionej bazy $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ przestrzeni $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} N$, gdzie $\boldsymbol{p}_0 \in N$ to dowolnie wybrany punkt.*
2. *Załóżmy, że $\Phi : \mathbb{R}^k \overset{otw.}{\supset} U \to \mathbb{R}^n$ jest parametryzacją N. Wówczas standardowa orientacja w dziedzinie (tzn. taka że baza standardowa $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$ w $\mathbb{R}^k$ jest dodatnio zorientowana) zadaje orientację w obrazie. Mianowicie, przyjmujemy, że baza $\{D\Phi[\boldsymbol{e}_1], D\Phi[\boldsymbol{e}_2], \ldots, D\Phi[\boldsymbol{e}_k]\}$ jest dodatnio zorientowana.*
3. *Jeśli N jest brzegiem $(k+1)$-wymiarowej rozmaitości zorientowanej $M \subset \mathbb{R}^n$, wówczas N dziedziczy z M orientację. Mianowicie, powiemy, że baza $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ przestrzeni $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} N$ jest dodatnio zorientowana, jeśli baza $\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$, powstała przez dopisanie wektora $\boldsymbol{n}$ – normalnego do N i skierowanego na zewnątrz N jest dodatnio zorientowaną bazą $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} M$. W skrócie*

$$\{\boldsymbol{n}, \mathbf{or}_N\} = \mathbf{or}_M \ .$$

4. *Jeśli N jest jedno-wymiarowe $(k = 1)$ orientację możemy utożsamiać z kierunkiem obiegu krzywej N.*
5. *Jeśli N jest powierzchnią w $\mathbb{R}^3$ (a więc $k = 2$, $n = 3$), zadanie orientacji jest równoważne z wyróżnieniem jednego z dwóch kierunków prostopadłych do N, mianowicie jeśli $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ jest dodatnio zorientowaną bazą $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}_0} N$, takim wyróżnionym kierunkiem będzie $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$. Mówimy czasem, że ów wyróżniony kierunek wskazuje dodatnią stronę N.*

Uwaga 1. W typowych zadaniach orientacja jest zadana na jeden z powyższych sposobów. Zmieniając opis podrozmaitości (na przykład przechodząc do nowych zmiennych), albo używając twierdzenia Stokesa, trzeba zadbać aby wszystkie nasze wybory były zgodne z orientacją daną pierwotnie w zadaniu.

Zadanie 1. Niech $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni wektorowej. Wykaż, że dla dowolnej permutacji $\sigma \in \Sigma_n$ bazy $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i $\{v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\}$ są zgodnie zorientowane wtedy i tylko wtedy gdy $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$.

Zadanie 2. Niech $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni wektorowej. Rozważmy skalary $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wykaż, że bazy $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i $\{a_1 \cdot v_1, a_2 \cdot v_2, \ldots, a_n \cdot v_n\}$ są zgodnie zorientowane wtedy i tylko wtedy gdy $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n > 0$.

Zadanie 3. Rozważmy parabloidę $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ zorientowaną tak, że wektor $\boldsymbol{n} = [2, 0, -1]$ jest wektorem normalnym skierowanym na zewnątrz P w punkcie $(1, 0, 1)$. Czy zgodne z tą orientacją są:

a) Orientacja P indukowana przez parametryzację $\Phi : (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$ ze standardowej orientacji $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$?

b) Orientacja P indukowana przez parametyzację $\Psi : (r, \phi) \mapsto (r \cos\phi, r \sin\phi, r^2)$ ze standardowej orientacji $\mathbb{R}^2 \ni (r, \phi)$?

c) Orientacja P zadana w punkcie $(0, 0, 0)$ przez bazę wektorów stycznych $\boldsymbol{w}_1 = [1, 1, 0]$ i $\boldsymbol{w}_2 = [1, 0, 0]$?

Zadanie 4. Rozważmy powierzchnię obrotową $S = \{(x, y, z) \mid z^2 + y^2 = \cos^2(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ zorientowaną tak, że dodatnia strona tej powierzchni jest widoczna z punktu $(0, 0, 0)$. Czy parametryzacja $\Phi : (x, \phi) \mapsto (x, \cos x \sin\phi, \cos x \cos\phi)$ gdzie $\mathbb{R}^2 \ni (x, \phi)$ ma orientację standardową jest zgodna z tą wybraną orientacją?

Zadanie 5. Rozważmy rozmaitość 3-wymiarową z brzegiem $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ ze standardową orientacją dziedziczoną z $\mathbb{R}^3$. Brzeg $\partial M = S^2(\mathbf{0}, 1) \cup S^2(\mathbf{0}, 2)$ ma orientację dziedziczoną z orientacji M. Czy parametryzacja $\Phi : (\beta, \phi) \mapsto (\cos\beta \cos\phi, \cos\beta \sin\phi, \sin\beta)$, gdzie $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \ni (\beta, \phi)$ ma orientację standardową, jest zgodna z tak przyjętą orientacją $S^1(\mathbf{0}, 1)$?

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Macierz przejścia miedzy tymi bazami to macierz permutacji σ. Jej wyznacznik to $\mathrm{sgn}(\sigma)$

Zadanie 2. Macierz przejścia między tymi bazami to $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jej wyznacznik to $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n$.

Zadanie 3. a) Nie; $D\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$, stąd obrazem bazy standardowej $\boldsymbol{e}_1 = [1,0]^T$, $\boldsymbol{e}_2 = [0,1]^T$ w punkcie $(x,y) = (1,0) = \Phi^{-1}(1,0,1)$ są wektory $\boldsymbol{v}_1 = [1,0,2]$ i $\boldsymbol{v}_2 = [0,1,0]$. Ich iloczyn wektorowy to $[-2,0,1] = -\boldsymbol{n}$. b) Nie. Postępując analogicznie jak poprzednio, baza $\boldsymbol{v}_1 = [1,0,2]$, $\boldsymbol{v}_2 = [0,1,0]$ jest zorientowana zgodnie z parametryzacją, a przeciwnie niż zadana orientacja P. c) Tak. Łatwo zauważyć, że wektory normalne zewnętrzne do P mają wszystkie ujemną składową z. Z kolei $= \boldsymbol{w}_1 \times \boldsymbol{w}_2 = [0,0,-1]$ też jest skierowany w dół.

Zadanie 4. Odp: nie. Wybierzmy dowolny punkt rozważanej powierzchni, na przykład $(0,1,0) = \Phi(0, \frac{\pi}{2})$. $D\Phi(0, \frac{\pi}{2}) = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sin x \sin\phi & \cos x \cos\phi \\ -\sin x \cos\phi & -\cos x \sin\phi \end{pmatrix}\right|_{(0,\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Stąd obrazem bazy $\boldsymbol{e}_1 = [1,0]^T$, $\boldsymbol{e}_2 = [0,1]^T$ jest baza $\boldsymbol{v}_1 = [1,0,0]$ i $\boldsymbol{v}_2 = [0,0,-1]$. Wyznacza ona kierunek prostopadły do S równy $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = [0,1,0]$, a więc orientacja zgodna z parametryzacją wskazuje od punktu $(0,0,0)$, a nie do punktu $(0,0,0)$ jak wyjściowa parametryzacja.

Zadanie 5. Odp: tak. Orientacja $S^2(\mathbf{0},1)$ jest zadana przez wektor normalny do ∂M skierowany na zewnątrz M, a więc jak łatwo zauważyć do środka rozważanej sfery. Macierz różniczki Φ to $D\Phi(\beta,\phi) = \begin{pmatrix} -\sin\beta\cos\phi & -\cos\beta\sin\phi \\ -\sin\beta\sin\phi & \cos\beta\cos\phi \\ \cos\beta & 0 \end{pmatrix}$. Obrazem bazy standardowej $\boldsymbol{e}_1 = [1,0]^T$, $\boldsymbol{e}_2 = [0,1]^T$ jest zatem baza $\boldsymbol{v}_1 = [-\sin\beta\cos\phi, -\sin\beta, \sin\phi, \cos\beta]$, $\boldsymbol{v}_2 = [-\cos\beta\sin\phi, \cos\beta\cos\phi, 0]$. Wyznacza ona wektor normalny $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = [-\cos^2\beta\cos\phi, -\cos^2\beta\sin\phi, -\cos\beta\sin\beta] = (-\cos\beta)\Phi(\phi,\beta)$, wobec $\cos\beta > 0$ wektor ten jest skierowany do środka sfery $S^2(\mathbf{0},1)$, tak jak w rozważanej orientacji.