AM II.2 2019/20 (gr 3).
Zadania przygotowawcze do kolokwium

Aktualizacja: 5 maja 2020

1 Przejścia graniczne w całce

Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{e^{-n}}^{1}\left(1+\frac{\ln x}{n}\right)^n x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 2. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\ln(x^n+2^n)}{nx^2}\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 3. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}\frac{n}{nx+x^5+1}\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 4. (trudniejsze) Niech $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wykaż, że

$$\lim_{y\to 0}\int_{0}^{\infty}\frac{y\cdot f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)\ .$$

Zadanie 5. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{x^2+y^2\le 1\}}\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^n+y^n)\mathrm{d}^2(x,y).$$

Zadanie 6. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot e^z}{n^2\left[1-\cos\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n}\right)\right]}\mathrm{d}^3(x,y,z)\ ,$$

gdzie $A=\{(x,y,z)\mid z^2<x^2+y^2+z^2\le 3z^2, x^2+y^2+z^2\le 1, z>0\}$.
Zadanie 7. Niech $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 0<x^2+y^2<1, 0<z<2\}$. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A}\frac{z}{n}\ln\left[(x^2+y^2)^n+(x^2+y^2)^{-n}\right]\mathrm{d}^3(x,y,z)\ .$$

Zadanie z kolokwium P.St.

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. *Rozwiązanie:* W istocie zadanie bardzo podobne co wcześniej $f_n(x) = \chi_{[e^{-n},1]}(x) \cdot \left(1+\frac{\ln x}{n}\right)^n x^{-\frac{3}{2}}$ jest iloczynem $x^{-\frac{3}{2}}$ i dwóch funkcji rosnących – $\chi_{[e^{-n},1]}(x)$ oraz $\left(1+\frac{\ln x}{n}\right)^n$. Granicą punktową ciągu jest funkcja całkowalna $\chi_{[0,1]}(x) \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ której całka wynosi 2.

Zadanie 2. *Rozwiązanie:* Granica nie istnieje. Zauważmy, że $f_n(x) \geq \frac{\ln(2^n)}{nx^2} = \frac{\ln 2}{x^2}$. Łatwo się przekonać, że funkcja ta nie jest całkowalna na przedziale $[0,1]$.

Zadanie 3. *Rozwiązanie:* Zauważmy, że $f_n(x) = \frac{n}{nx+x^5+1}$ jest ciągiem monotonicznie rosnącym do $f(x) = \frac{1}{x}$, co jest oczywiście niecałkowalne na $[0,1]$. Gdyby granica $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n$ była skończona to funkcja $f(x)$ byłaby całkowalna, a nie jest. Zatem granicą jest $+\infty$.

Zadanie 4. *Rozwiązanie:* Zamieńmy zmienne $z = \frac{x}{y}$. Wówczas mamy

$$\int_0^\infty \frac{y \cdot f(x)}{x^2+y^2} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{y \cdot f(yz)}{y^2z^2+y^2} y \mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{\cdot f(yz)}{z^2+1} \mathrm{d}z \ .$$

Granicą punktową jest $\frac{f(0)}{1+z^2}$ – korzystamy tutaj z ciągłości f i jest to zbieżność zmajoryzowana przez $\frac{M}{1+z^2}$ – korzystamy z ograniczoności f. Z tw. Lebesgue'a granicą ciągu całek jest całka z granicy $\int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+z^2} \mathrm{d}z = \frac{f(0)\pi}{2}$.

Zadanie 5. *Rozwiązanie:* Po zamianie na współrzędne biegunowe (r, ϕ) mamy

$$I_n = \int_{r \leq 1} \frac{r^2}{r} \cdot r^n \left(\cos^n \phi + \sin^n \phi\right) \cdot r \ \mathrm{d}^2(r,\phi) \ ,$$

Co łatwo ograniczyć przez funkcję $\ln(r^2)2r$, całkowalną na zbiorze zwartym $[0,1] \times [0,2\pi] \ni (r,\phi)$. Możemy zatem przejść do granicy punktowej korzystając z tw. Lebesgue'a. Tą granicą jest oczywiści 0.

Zadanie 6. *Rozwiązanie:* Korzystając z granicy elementarnej $n^2\left[1-\cos\left(\frac{t}{n}\right)\right] \xrightarrow{t\to 0} \frac{t^2}{2}$ łatwo pokażemy, że granicą punktową ciągu funkcji podcałkowych jest funkcja

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y,z) = \frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ e^z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} = \frac{2e^z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =: f_0(x,y,z) \ .$$

Zauważmy ponadto, że d.d.d. n i $t < 1$ zachodzi $n^2\left[1-\cos\left(\frac{t}{n}\right)\right] > \frac{t^2}{4}$ skąd, ponieważ argument kosinusa jest ograniczony przez 1 na rozpatrywanym zbiorze, mamy majorantę rozpatrywanego ciągu równą $\frac{4e^z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2f_0$. Pokażemy teraz, że funkcja f_0 jest całkowalna na A, skąd będzie wynikało, że również majoranta równa $2f_0$ jest całkowalna na A, a stąd na mocy tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$\lim_n \int_A f_n = \int_A \lim_n f_n = \int_A f_0 \ .$$

Przejdźmy do współrzędnych walcowych

$$\Phi(r,\phi,z) = (x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z) \ ,$$

gdzie $r \in \mathbb{R}_+$, $\phi \in (0,2\pi)$ oraz $z \in \mathbb{R}$. Jakobian wynosi $J_\Phi(r,\theta,z) = r$. Zbiór A w tych współrzędnych to $\Phi^{-1}(A) = \{(r,\phi,z) \mid \phi \in (0,2\pi), 0 < r, r^2+z^2 \leq 3z^2, r^2+z^2 \leq 1, z > 0\}$. Jak widzimy $0 < r \leq \min\{\sqrt{2}z, \sqrt{1-z^2}\}$. Ta nierówność ma rozwiązania tylko gdy $z \in (0,1)$ i mamy $r \in (0, \sqrt{2}z)$ dla

$z \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ oraz $r \in (0, \sqrt{1-z^2})$ dla $z \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$. Wobec tego

$$\int_A f_0 = \int_{\Phi^{-1}(A)} \frac{2e^z}{\sqrt{r^2+z^2}} \cdot r \, \mathrm{d}^3(r,\phi,z) \stackrel{\text{Fub.}}{=}$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \int_0^{\sqrt{2}z} \frac{2e^z}{\sqrt{r^2+z^2}} \cdot r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{2e^z}{\sqrt{r^2+z^2}} \cdot r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}\phi =$$

$$2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2e^z \sqrt{r^2+z^2} \Big|_0^{\sqrt{2}z} \mathrm{d}z + 2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 2e^z \sqrt{r^2+z^2} \Big|_0^{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}z =$$

$$2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2e^z z(\sqrt{3}-1) \, \mathrm{d}z + 2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 2e^z(1-z) \, \mathrm{d}z = \ldots \text{Wolfram} \ldots =$$

$$4\pi \left(-1 + \sqrt{3} + e - \sqrt{3}e^{1/\sqrt{3}} \right)$$

Zadanie 7. *Rozwiązanie:* Po zamianie na współrzędne walcowe i zastosowaniu tw. Fubini'ego (funkcja jest ciągła i dodatnia, zbiór mierzalny (otwarty)) mamy

$$I_n = \int_B \frac{z}{n} \ln \left[r^{-2n}(1+r^{4n}) \right] r \, \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \ ,$$

gdzie $B = \{r \in (0,1), \phi \in (0, 2\pi), z \in (0,2)\}$. Możemy łatwo ograniczyć funkcję podcałkową:

$$\frac{z}{n} \ln \left[r^{-2n}(1+r^{4n}) \right] r = \frac{z}{n} \left[-2n \ln(r) + \ln(1+r^{4n}) \right] r = -2zr \ln r + \frac{z}{n} r \ \ln(1+r^{4n}) \le -2rz + zr \ln 2 \ .$$

Jest to funkcja ciągła ograniczona na zbiorze otwartym i ograniczonym B, a więc całkowalna. Z tw. Lebesgue'a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_B \lim_{n\to+\infty} \frac{z}{n} \ln \left[r^{-2n}(1+r^{4n}) \right] r \, \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \int_B -2zr \ln r \, \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi =$$

$$-2 \int_0^2 z\mathrm{d}z \cdot \int_0^1 r \ln r \mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = (-2) \frac{z^2}{2} \Big|_0^2 \cdot \left[-\frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{2} \ln r \right]_0^1 \cdot 2\pi = (-2) \cdot 2 \cdot \frac{-1}{4} \cdot 2\pi = 2\pi \ .$$

2 Twierdzenie Fubini'ego i zamiana zmiennych

Zadanie 1. Oblicz miarę zbioru

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y, x + y < 1, 0 < z < x^2 + y^2\} \ .$$

Zadanie 2. Oblicz całkę

$$\int_{\{x>0,y>1,z>1\}} \frac{x}{1 + (xyz)^4} \, \mathrm{d}^3(x, y, z) \ .$$

Wskazówka*:* $\int \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \arctan(t)$.

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_A \ln(x + y)(x - 2y)^2 \mathrm{d}\lambda^2(x, y) \ ,$$

gdzie $A \subset \mathbb{R}^2$ to równoległobok o wierzchołkach $(1, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$ i $(0, 1)$.

Zadanie 4. Niech $a < b$ będą liczbami dodatnimi. Oblicz miarę zbioru

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq xy \leq 2, a \leq \frac{y}{x^2} \leq b\} \ .$$

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int_B x^4 y \ \mathrm{d}^2(x, y) \ ,$$

gdzie $B = \{(x, y) \mid \frac{1}{3}y^2 < x < \frac{1}{2}y^2, \frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}\}$.

Zadanie 6. Oblicz miarę zbioru $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y > 0, xy < z, x^4 + z^4 < x^2 z\}$.

Zadanie 7. Oblicz całkę

$$\int_0^1 \int_0^{1-2\sqrt{x}+x} x + y + 2\sqrt{xy} \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x$$

a) Używając zamiany zmiennych $x = s \cdot \cos^4(t)$, $y = s \cdot \sin^4(t)$.

b) używając zamiany zmiennych $t = \sqrt{x}$, $s = \sqrt{y}$.

Zadanie 8. Oblicz miarę zbioru

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1, y^2 + z^2 < 1\} \ .$$

Zadanie 9. Rozważmy funkcję całkowalną $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right)^2 \ .$$

Zadanie 10. Rozważmy funkcję $f \in L^1([0, a])$ i zdefiniujmy $g(x) := \int_x^a \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$. Wykaż, że g jest funkcją całkowalną na $[0, a]$ i że zachodzi równość

$$\int_{[0,a]} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,a]} g(x)\mathrm{d}x \ .$$

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1.

Rozwiązanie: Mamy do czynienia ze zbiorem otwartym, a więc mierzalnym. Ponadto łatwo sprawdzić, że B jest ograniczony. Funkcja charakterystyczna χ_B jest zatem całkowalna i możemy używać tw. Fubini'ego. Kładąc $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y, x+y < 1\}$ mamy:

$$\lambda_3(B) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_\Delta \left(\int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}^2(x,y) = \int_\Delta (x^2+y^2)\ \mathrm{d}^2(x,y) = \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
$$\int_0^1 \left[yx^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[(1-x)x^2 + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right] \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{6}\ .$$

Zadanie 2.

Rozwiązanie: Funkcja jest ciągła i dodatnia, a zbiór otwarty (mierzalny), zatem liczyć całkę iterowaną na mocy twierdzenia Tonelli'ego. Wskazówka sugeruje, aby spróbować zobaczyć w rozważanej całce całkę z funkcji $\frac{1}{1+t^2}$. Tak będzie, jeśli podstawimy na przykład $(xyz)^4 = t^2$. Mamy

$$I \overset{\text{Fub.}}{=} \int_1^\infty \int_1^\infty \left[\int_0^\infty \frac{x}{1+(xyz)^4}\ \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left| t = (yz)^2 \cdot x^2,\ \mathrm{d}t = (yz)^2 2x\ \mathrm{d}x,\ x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2(yz)^2}\mathrm{d}t \right| =$$
$$\int_1^\infty \int_1^\infty \left[\int_0^\infty \frac{1}{2(yz)^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\arctan(t)\Big|_0^\infty \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{y^2}\ \frac{1}{z^2}\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$\frac{\pi}{\cdot} \int_1^\infty \frac{1}{y^2}\ \mathrm{d}y \cdot \int_1^\infty \frac{1}{z^2}\ \mathrm{d}z = \frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{y} \right) \Big|_1^\infty \cdot \left(\frac{-1}{z} \right) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}\ .$$

Zadanie 3. *Rozwiązanie:* Postać funkcji i zbioru sugeruje, aby użyć podstawienia

$$\Phi : (x,y) \longmapsto (s = x+y, t = x-2y)$$

i skorzystać ze wzoru na zamianę zmiennych w całce.

Sposób 1 (przechodzimy od zmiennych (x,y) do zmiennych (s,t)). Będziemy chcieli zastosować wzór

$$\int_A f(\Phi(x,y)) \cdot J_\Phi(x,y)\ \mathrm{d}^2(x,y) = \int_{\Phi(A)} f(s,t)\ \mathrm{d}^2(s,t)\ .$$

Jakobian odwzorowania Φ wynosi $J_\Phi(x,y) = |\det \mathrm{d}\Phi(x,y)| = |\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}| = 3$, a obrazem dziedziny jest prostokąt $\Phi(A) = \{(s,t) \mid s \in (1,4), t \in (-2,1)\}$. Zauważmy, że

$$\ln(x+y)(x-2y)^2 = f(\Phi(x,y))J_\Phi(x,y) = f(x+y, x-2y)\ 3\ ,$$

gdzie $f(s,t) = \frac{1}{3}\ln(s)t^2$. Wobec tego

$$I = \int_A \ln(x+y)(x-2y)^2\ \mathrm{d}^2(x,y) = \int_{\Phi(A)} f(s,t)\ \mathrm{d}^2(s,t) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_1^4 \int_{-2}^1 \ln(s)\, \frac{1}{3}t^2\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}s =$$
$$(s\ln s - s)\Big|_1^4 \cdot \frac{t^3}{9}\Big|_{-2}^1 = \ldots = 8\ln 2 - 3\ .$$

Sposób 2 (przechodzimy od zmiennych (s,t) do zmiennych (x,y)). Będziemy używali odwrotnej zamiany zmiennych

$$\Psi(t,s) = (x,y) = \left(\frac{1}{3}(2s+t), \frac{1}{3}(s-t) \right)\ .$$

Chcemy zastosować wzór

$$\int_{\Psi^{1-}(A)} f(\Psi(s,t)) \cdot J_\Psi(s,t)\ \mathrm{d}^2(s,t) = \int_A f(x,y)\ \mathrm{d}^2(x,y)\ .$$

Jakobian odwzorowania Ψ wynosi $J_\Psi(s,t) = |\det \mathrm{d}\Psi(s,t)| = |\det \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}| = \frac{1}{3}$, a przeciwobrazem dziedziny jest prostokąt $\Psi^{-1}(A) = \{(s,t) \mid s \in (1,4), t \in (-2,1)\}$. Zatem

$$I = \int_A \ln(x+y)(x-2y)^2\ \mathrm{d}^2(x,y) = \int_{\Psi^{-1}(A)} \ln(s)t^2\ J_\Psi(s,t)\ \mathrm{d}^2(s,t) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_1^4 \int_{-2}^1 \ln(s)\, \frac{1}{3}t^2\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}s = 8\ln 2 - 3\ .$$

Zadanie 4.

Rozwiązanie: Postać zbioru sugeruje, aby użyć podstawienia $t = xy$, $s = \frac{y}{x^2}$. Przekształceniem odwrotnym jest

$$\Phi : (t,s) \mapsto \left(x = (t/s)^{1/3}, y = (t^2 s)^{1/3}\right)\ .$$

Jego jakobian wynosi

$$J_\Phi(t,s) = |\det \begin{pmatrix} \frac{1}{3t^{2/3}s^{1/3}} & -\frac{t^{1/3}}{3s^{4/3}} \\ \frac{2s^{1/3}}{3t^{1/3}} & \frac{t^{2/3}}{3s^{2/3}} \end{pmatrix}| = \frac{1}{3s}\ ,$$

zaś $\Phi^{-1}(E) = \{(t,s) \mid t \in [1,2], s \in [a,b]\}$. Ze wzoru na zamianę zmiennych:

$$\lambda_2(E) = \int_E 1\ \mathrm{d}^2(x,y) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1\ J_\Phi(t,s)\ \mathrm{d}^2(t,s) = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1\ \frac{1}{3s}\ \mathrm{d}^2(t,s) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_1^2 \left[\int_a^b \frac{1}{3s}\ \mathrm{d}s\right]\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\ .$$

Sposób 2. Możemy też rozwiązać używając odwrotnej zamiany zmiennych

$$\Psi : (x,y) \longmapsto (t = xy, s = \frac{y}{x^2})\ .$$

Jej Jakobianem jest

$$J_\Psi(x,y) = |\det \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}| = \frac{3y}{x^2}\ .$$

Ze wzoru na zamianę zmiennych

$$\int_E f(\Psi(x,y))\ J_\Psi(x,y)\ \mathrm{d}^2(x,y) = \int_{\Psi(E)} f(t,s)\ \mathrm{d}^2(t,s)\ .$$

Szukamy teraz takiej funkcji f aby całka po lewej stronie dała $\lambda_2(E) = \int_E 1\,\mathrm{d}^2(x,y)$, a więc $f(\Psi(x,y))\ J_\Psi(x,y) = 1$, skąd $f(\Psi(x,y)) = \frac{1}{J_\Psi(x,y)} = \frac{x^2}{3y} = \frac{1}{3s(x,y)}$. Wobec tego $f(t,s) = \frac{1}{3s}$ i mamy

$$\lambda_2(E) = \int_{\Psi(E)} \frac{1}{3s}\ \mathrm{d}^2(t,s) = \ldots = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\ .$$

Zadanie 5. *Rozwiązanie:* Użyjemy podstawienia

$$\Phi : (x,y) \longmapsto \left(s = xy, t = \frac{y^2}{x}\right)\ .$$

Jego jakobian wynosi

$$J_\Phi(x,y) = |\det \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix}| = \frac{3y^2}{x}\ ,$$

zaś $\Phi(B) = \{(s,t) \mid s \in (1,2), t \in (2,3)\}$. Ponadto $x^4 y = \frac{1}{3} x^5 y \; \frac{3y^2}{x} = \frac{1}{3}(xy)^3 \left(\frac{y^2}{x}\right)^{-2} \frac{3y^2}{x} = f(\Phi(x,y))\; J_\Phi(x,y)$, gdzie $f(s,t) = \frac{1}{3} s^3 t^{-2}$. Z twierdzenia o zamianie zmiennej w całce:

$$I = \int_B x^4 y \;\mathrm{d}^2(x,y) = \int_B f(\Phi(x,y))\; J_\Phi(x,y)\;\mathrm{d}^2(x,y) = \int_{\Phi(B)} f(s,t)\;\mathrm{d}^2(s,t) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_1^2 \int_2^3 \frac{1}{3} s^3 t^{-2}\;\mathrm{d}t\;\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\frac{s^4}{4}\bigg|_1^2 \cdot \frac{-1}{t}\bigg|_2^3 = \ldots = \frac{5}{24}\;.$$

Sposób 2. Innym sposobem jest odwrócenie zależności $s = xy$, $t = \frac{y^2}{x}$, co prowadzi do podstawienia

$$\Psi : (t,s) \longmapsto \left(x = (s^2/t)^{1/3}, y = (st)^{1/3}\right)$$

o Jakobianie

$$J_\Psi(t,s) = |\det \begin{pmatrix} -\frac{s^{2/3}}{3t^{4/3}} & \frac{2}{3t^{1/3}s^{1/3}} \\ \frac{s^{1/3}}{3t^{2/3}} & \frac{t^{1/3}}{3s^{2/3}} \end{pmatrix}| = \frac{1}{3t}\;.$$

Ze wzoru na zamianę zmiennych

$$\int_B x^4 y\;\mathrm{d}^2(x,y) = \int_{\Psi^{-1}(B)} x(t,s)^2 y(t,s)\; J_\Psi(t,s)\;\mathrm{d}^2(t,s) = \int_{\Psi^{-1}(B)} \left(\frac{s^2}{t}\right)^{4/3} (st)^{1/3}\;\frac{1}{3t}\;\mathrm{d}^2(t,s) = \int_{\Psi^{-1}(B)} \frac{s^3}{3t^2}\;\mathrm{d}^2(t,s) = \ldots = \frac{5}{24}\;.$$

Zadanie 6. *Rozwiązanie:* Mamy do czynienia ze zbiorem otwartym, a więc mierzalnym, wobec czego $\lambda_3(A) = \int_A 1$ możemy liczyć z twierdzenia Fubini'ego i wykonać najpierw całkowanie po y:

$$\lambda_3(A) = \int_B \left[\int_0^{z/x} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}^2(x,z) = \int_B \frac{z}{x}\;\mathrm{d}^2(x,z)\;,$$

gdzie B jest zbiorem tych $(x,z) \in \mathbb{R}^2$, dla których istnieje jakieś y takie, że $(x,y,z) \in A$. Łatwo zauważyć, że wobec warunku $x > 0$ nierówność $0 < y < \frac{z}{x}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $z > 0$. Wnioskujemy stąd, że $B = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x,z > 0, x^4 + z^4 < x^2 z\}$. Teraz są co najmniej dwa sposoby rozwiązania.

Sposób sprytny. Przekształćmy $x^4 + z^4 < x^2 z$ na $\frac{x^2}{z} + \frac{z^3}{x^2} < 1$ i użyjmy podstawienia $t = \frac{x^2}{z}$ oraz $s = \frac{z^3}{x^2}$. Odwracając tę zależność mamy:

$$\Psi : (t,s) \longmapsto \left(x = \sqrt[4]{t^3 s}, z = \sqrt{ts}\right)\;.$$

Przeciwdziedziną jest trójkąt $\Psi^{-1}(B) = \{(t,s) \mid t,s > 0, t+s < 1\}$, zaś jakobian wynosi

$$J_\Psi(t,s) = |\det \begin{pmatrix} \frac{3s^{1/4}}{4t^{1/4}} & \frac{t^{3/4}}{4s^{3/4}} \\ \frac{s^{1/2}}{2t^{1/2}} & \frac{t^{1/2}}{2s^{1/2}} \end{pmatrix}| = \frac{t^{1/4}}{4s^{1/4}}\;.$$

Stąd

$$I = \int_B \frac{z}{x}\;\mathrm{d}^2(x,z) = \int_{\Psi^{-1}(B)} \frac{z(t,s)}{x(t,s)}\; J_\Psi(t,s)\;\mathrm{d}^2(t,s) = \int_{\Psi^{-1}(B)} \frac{t^{1/2}s^{1/2}}{t^{3/4}s^{1/4}}\;\frac{t^{1/4}}{4s^{1/4}}\;\mathrm{d}^2(t,s) = \int_{\Psi^{-1}(B)} \frac{1}{4}\;\mathrm{d}^2(t,s) = \frac{1}{4}\lambda_2(\Psi^{-1}(B)) = \frac{1}{8}\;.$$

Sposób mniej sprytny. Możemy rozwiazać nierówność bi-kwadratową na x względem z dochodząc do

$$x \in \left(\sqrt{\frac{z}{2} - \sqrt{\frac{z^2}{4} - z^4}}, \sqrt{\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - z^4}}\right) =: P_z \ ,$$

co daje zbiór niepusty tylko dla $z \in (0, \frac{1}{2})$. Wykonajmy teraz całkowanie

$$I = \int_B \frac{z}{x} \ \mathrm{d}^2(x,z) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_{P_z} \frac{z}{x} \ \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}z = \int_0^{\frac{1}{2}} z \ln x \Big|_{x=\sqrt{\frac{z}{2}-\sqrt{\dots}}}^{x=\sqrt{\frac{z}{2}+\sqrt{\dots}}} \mathrm{d}z = \int_0^{\frac{1}{2}} z \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{z}{2}+\sqrt{\frac{z^2}{4}-z^4}}}{\sqrt{\frac{z}{2}-\sqrt{\frac{z^2}{4}-z^4}}}\right) \mathrm{d}z =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} z \ln\left(\frac{\frac{z}{2}+\sqrt{\frac{z^2}{4}-z^4}}{\frac{z}{2}-\sqrt{\frac{z^2}{4}-z^4}}\right) \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} z \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4z^2}}{1-\sqrt{1-4z^2}}\right) \mathrm{d}z = \left| w = 4z^2, \mathrm{d}w = 8z \ \mathrm{d}z \right| =$$

$$\frac{1}{16}\int_0^1 \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-w}}{1-\sqrt{1-w}}\right) \mathrm{d}w = \dots \text{Wolfram} \dots = \frac{1}{8} \ .$$

Zadanie 7. *Rozwiązanie:* Punkt (a). Zauważmy, że mamy do czynienia z całką z funkcji $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ po zbiorze $A = \{(x,y) \mid x,y \geq 0, \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 1\}$ – warunek $0 \leq y \leq 1-2\sqrt{x}+x = (1-\sqrt{x})^2$ prowadzi do $\sqrt{y}+\sqrt{x} \leq 1$. Jakobian przekształcenia $\Phi : (t,s) \mapsto (x = s \cdot \cos^4(t), y = s \cdot \sin^4(t))$ to $4s\cos^3(t)\sin^3(t)$. W tych zmiennych $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{s}\cos^2(t) + \sqrt{s}\sin^2(t) = \sqrt{s}$, więc $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = s$. Przeciwdziedziną jest $\Phi^{-1}(A) = \{(s,t) \mid s \in [0,1], t \in [0,\pi/2]\}$. Stosując twierdzenie o zamianie zmiennych dostajemy

$$\int_A (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \ \mathrm{d}^2(x,y) = \int_{\Phi^{-1}(A)} s \ 4s\cos^3(t)\sin^3(t) \ \mathrm{d}^2(t,s) \overset{\text{Fub.}}{=} 4\int_0^1 s^2 \mathrm{d}s \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3(t)\sin^3(t)\mathrm{d}t =$$

$$4\frac{s^3}{3}\Big|_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^3(t) \ \cos(t)\mathrm{d}t = \left| u = \sin(t), \mathrm{d}u = \cos t \ \mathrm{d}t \right| =$$

$$\frac{4}{3}\int_0^1 (1-u^2)u^3 \ \mathrm{d}u = \dots = \frac{4}{3}\frac{1}{12} = \frac{1}{9} \ .$$

Punkt (b). Jakobian przekształcenia $\Psi : (x,y) \mapsto (t = \sqrt{x}, s = \sqrt{y})$ to $\frac{1}{4\sqrt{xy}}$, zatem

$$\int_A (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \mathrm{d}^2(x,y) = \int_A (\sqrt{x}+\sqrt{y}) \cdot 4\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{4\sqrt{xy}} \mathrm{d}^2(x,y) \overset{\text{podst.}}{=} \int_{\Psi(A)} (t+s)^2 \ 4ts \ \mathrm{d}^2(t,s) = \dots = \frac{1}{9} \ ,$$

gdzie $A = \{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in [0,(1-\sqrt{x})^2]\} = \{(x,y) \mid x,y \geq 0, \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 1\}$, zaś $\Psi(A) = \{(t,s) \mid t,s \geq 0, t+s < 1\}$.

Zadanie 8.

Rozwiązanie: Sposób szybki. Musimy policzyć całkę $\int_C 1$ – jest to funkcja ciągła ograniczona, C jest oczywiście zbiorem ograniczonym, a zatem χ_C jest funkcją całkowalną, więc możemy stosować twierdzenie Fubini'ego. Zauważmy, że jeśli $(x,y,z) \in C$ to $x^2, y^2 < 1-z^2$, a zatem $x,y \in (-\sqrt{1-z^2}, \sqrt{1-z^2})$. Ponadto nierówności $x^2, y^2 < 1-z^2$ mają rozwiązania wtedy i tylko wtedy gdy $z \in (-1,1)$ Mamy zatem

$$\lambda_3(C) = \int_C \mathrm{d}^3(x,y,z) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}z = \int_{-1}^1 \left(2\sqrt{1-z^2}\right)^2 \ \mathrm{d}z =$$

$$4\int_{-1}^1 (1-z^2) \ \mathrm{d}z = 4\left(z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1 = 4 \ 2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Przekombinowany sposób prowadzącego ćwiczenia. Zacznijmy od policzenia następującej całki

$$2\int \sqrt{1-y^2}\ \mathrm{d}y = \Big| y=\sin\phi,\ \mathrm{d}y=\cos\phi\ \mathrm{d}\phi \Big| = 2\int \sqrt{1-\sin^2\phi}\cos\phi\ \mathrm{d}\phi = \int 2\cos^2\phi\ \mathrm{d}\phi = \Big|2\cos^2\phi = \cos(2\phi)+1\Big|$$
$$\int [\cos(2\phi)+1]\ \mathrm{d}\phi = \phi + \frac{1}{2}\sin 2\phi = \phi + \sin\phi\ \cos\phi = \arcsin y + y\sqrt{1-y^2}\ .$$

Teraz liczymy korzystając z twierdzenia Fubini'ego (zbiór jest otwarty (mierzalny) i ograniczony)

$$l_3(C) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_{-1}^{1}\int_{y^2<1-x^2}\int_{z^2<1-y^2} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{y^2<1-x^2} 2\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \overset{\text{wsk.}}{=} \int_{-1}^{1}\Big[\arcsin(y) + y\sqrt{1-y^2}\Big]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$
$$2\int_{-1}^{1} \arcsin\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}|x|\ \mathrm{d}x = 4\int_{0}^{1} \arcsin\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}|x|\ \mathrm{d}x =$$
$$4\int_0^1 \arcsin\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x + 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}x\ \mathrm{d}x =: 4I_1 + 4I_2\ .$$

Dokończmy rachunki

$$I_1 = \int_0^1 \arcsin\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \Big|x=\cos\phi,\ \mathrm{d}x = -\sin\phi\ \mathrm{d}\phi\Big| = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \arcsin(\sin\phi)(-\sin\phi)\ \mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi\ \sin\phi\ \mathrm{d}\phi \overset{\text{części}}{=}$$
$$\sin(\phi) - \phi\cos(\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \text{oraz}$$
$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}x\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ .$$

Ostatecznie $l_3(C) = 4I_1 + 4I_2 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$.

Zadanie 9. *Rozwiązanie:* Stosując twierdzenie Fubini'ego (dlaczego można?) łatwo uzasadnić, że $\int_a^b\int_x^b f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ to całka z funkcji $F(x,y) := f(x)f(y)$ po trójkącie $\Delta_{y>x} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid b\geq y\geq x\geq a\}$. Zamieniając nazwy x i y dostaniemy, że jest to również całka z funkcji $F(x,y) := f(x)f(y)$ po trójkącie $\Delta_{x>y} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid b\geq x\geq y\geq a\}$. Zatem

$$2\int_{\Delta_{y>x}} F = \int_{\Delta_{y>x}} F + \int_{\Delta_{x>y}} F = \int_{[a,b]^2} F \overset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\ .$$

Zadanie 10. *Rozwiązanie:* Przy założeniu, że możemy stosować tw. Fubini'ego mamy

$$\int_{[0,a]} g(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,a]}\left[\int_{[x,a]}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = \int_{[0,a]}\left[\int_{[0,a]}\chi_{[x,a]}(t)\cdot\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \overset{\text{Fub.}}{=} \int_{\Delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}^2(t,x) \overset{\text{Fub.}}{=}$$
$$\int_{[0,a]}\left[\int_{[0,t]}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t = \int_{[0,a]} f(t)\mathrm{d}t\ ,$$

gdzie $\Delta = \{(t,x)\in[0,a]^2 \mid t\geq x\}$. Zauważmy że powyższą równość możemy zastosować do funkcji $|f|$ i liczyć całkę iterowaną z funkcji mierzalnej i dodatniej używając tw. Tonelli'ego bez sprawdzania całkowalności. Ponieważ wynikiem jest całka skończona to analogiczna funkcja $\widetilde{g}$ rozpatrywana dla $|f|$ jest całkowalna, a stąd też i wyjściowa funkcja będzie całkowalna, gdyż oczywiście $|g| < \widetilde{g}$.

3 Pozostałe tematy dotyczące całkowania – całkowalność, całka z parametrem, splot

Zadanie 1. Czy funkcja $f(x,y) = e^{-xy}$ jest całkowalna na $\mathbb{R}^2_+$?
Zadanie 2. Dla funkcji całkowalnej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określamy $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\xi x)\mathrm{d}x$. Wykaż, że:

a) $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona.

b) Jeśli $f_n \to f$ w normie $L_1(\mathbb{R})$, to $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ jednostajnie.

c) Dla $f = \chi_{[0,\pi]}$, funkcja $\widehat{f}$ nie jest całkowalna na $\mathbb{R}$.

Zadanie 3. Dla $a > 0$ oblicz pochodną funkcji

$$g(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2}\mathrm{d}x\ .$$

a następnie wyznacz funkcję $g(a)$.
Zadanie 4. Rozważmy $f_0(t) := \chi_{[0,1]}(t)$ i zdefiniujmy indukcyjnie $f_n := f_0 * f_{n-1}$. Udowodnij, że

a) Nośnik f_n jest zawarty w $[0, n+1]$ (*nośnikiem funkcji* f nazywamy domknięcie zbioru $\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$)

b) $f_n \geq 0$.

c) f_n na każdym przedziale $[k, k+1]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ jest wielomianem stopnia nie większego niż n.

d) f_n jest klasy C^{n-1}, dla $n \geq 1$.

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. *Rozwiązanie:* Nie. Funkcja jest stałego znaku, możemy więc zastosować tw. Tonelli'ego i dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-xy}\,\mathrm{d}^2(x,y) = \int_{R_+}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{-1}{y} e^{-xy}\Big|_{x=0}^{x=+\infty} \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{y}\mathrm{d}y = +\infty\ .$$

Podobnie dowodzi się używając podstawienia biegunowego.

Zadanie 2. *Rozwiązanie:* a) Funkcja sin jest ciągła, zatem dla $\xi \to \xi_0$ mamy zbieżność punktową $f(x)\sin(\xi x) \to f(x)\sin(\xi_0 x)$. Z kolei rodzinę funkcji $|f(x)\sin(\xi x)|$ możemy wspólnie oszacować z góry przez funkcję całkowalną $|f(x)|$. Zatem z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\xi x)\mathrm{d}x \xrightarrow{\xi\to\xi_0} \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\xi_0 x)\mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi_0)\ ,$$

a więc mamy ciągłość. Ponadto $|\widehat{f}(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\mathrm{d}x$, skąd mamy ograniczoność.

b) $|\widehat{f}_n(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\cdot|\sin(\xi x)|\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ i oszacowanie nie zależy od ξ.

c) Możemy prosto obliczyć, że dla $f = \chi_{[0,\pi]}$ mamy $\widehat{f}(\xi) = \frac{1-\cos(\xi\pi)}{\xi}$. Trzeba pokazać że jest to funkcja niecałkowalna. Zauważmy, że dla $\xi = \left(k+\frac{1}{2}\right)$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ wartość funkcji wynosi $\frac{1}{\xi} \sim \frac{1}{k}$. Podobnie istnieje $\epsilon > 0$ i stała $c > 0$ taka, że jeśli $|\xi - \left(k+\frac{1}{2}\right)| < \varepsilon$ to $\widehat{f}(\xi) > \frac{c}{k}$ Sumując wkłady do całki od wszystkich takich ξ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ otrzymamy szereg rozbieżny.

Zadanie 3. *Rozwiązanie:* Odp: $g'(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$. Stosujemy twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki. Kładąc $f(x,a) := \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}$ mamy $|f(x,a)| \le \min\{a, \frac{1}{x^2}\}$, co jest całkowalne na $\mathbb{R}_+$. Dla $a \in (\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$, mamy $|\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}| = e^{-ax^2} \le e^{-\varepsilon x^2}$, a więc wspólne ograniczenie przez funkcję całkowalną. Stąd możemy wejść z pochodną pod całkę na każdym przedziale $(\varepsilon, +\infty)$. Mamy

$$\frac{\partial}{\partial a} g(a) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\ .$$

Odcałkowując $g'(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$ dostajemy $g(a) = \sqrt{\pi\cdot a} + C$ dla $a > 0$. Ciągłość $g(a)$ w zerze łatwo uzasadnić z tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej i oszacowania $|f(x,a)| \le \min\{a, \frac{1}{x^2}\}$. Oczywiście $g(0) = 0$, stąd $C = 0$. Ostatecznie $g(a) = \sqrt{\pi\cdot a}$.

Zadanie 4. *Rozwiązanie:* a) Łatwo sprawdzić, że $\operatorname{supp}(f*g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$, supp oznacza tutaj nośnik funkcji, zaś $+$ sumę algebraiczną zbiorów. Istotnie, załóżmy, że $x \notin \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$. Wówczas

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\operatorname{supp} f} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\ .$$

Ustalmy teraz $y \in \operatorname{supp} f$, gdyby $g(x-y) \neq 0$, to $x-y \in \operatorname{supp} g$, a zatem $x = y + (x-y) \in \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, wbrew założeniu. Oznacza to, że dla każdego elementu $y \in \operatorname{supp} f$ mamy $f(y)g(x-y) = 0$, a stąd $f*g(x) = 0$.

b) splot funkcji nieujemnych jest nieujemny – całkujemy iloczyn funkcji nieujemnych.

c) indukcyjnie: $f_n(x) = \int_0^1 f_{n-1}(x-t)\mathrm{d}t$ – dla $x \in [k, k+1]$ całkujemy wielomian, wynikiem jest wielomian wyższego stopnia.

d) indukcyjnie: $f_n(x) = \int_x^{x+1} f_{n-1}(t)\mathrm{d}t = F_{n-1}(x+1) - F_{n-1}(x)$, gdzie F_{n-1} oznacza funkcje pierwotną f_{n-1}. Jeśli f_{n-1} było klasy C^{n-2} to F_{n-1} jest klasy C^{n-1}.

4 Miara i całka powierzchniowa

Zadanie 1. Krzywa γ jest zadana we współrzędnych sferycznych

$$(x, y, z) = (r\cos\beta\cos\phi, r\cos\beta\sin\phi, r\sin\beta)$$

gdzie $r \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i $\phi \in (0, 2\pi)$; zależnością $\gamma = \{(r(t), \beta(t), \phi(t)) \mid t \in [a, b]\}$. Wykaż, że

$$l(\gamma) = \int_{[a,b]} \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \left(\beta'(t)^2 + \cos^2(\beta(t))\phi'(t)^2\right)}\, \mathrm{d}t \, .$$

Zadanie 2. Oblicz długość krzywych

a) $\gamma = \{(3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in [0, 1]\}$,

b) $\eta = \{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$.

Wyznacz położenie środka ciężkości tych krzywych.
Zadanie 3. Oblicz miarę powierzchniową torusa $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = R^2, z^2 + t^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^4$.
Zadanie 4. Oblicz powierzchnię zbioru $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x + e^{-x} = z - \sqrt{3}y, 0 < y < x \leq 1\}$.
Zadanie 5. Oblicz całkę powierzchniową

$$\int_\Sigma \sqrt{\frac{z}{1+2z}} \mathrm{d}\sigma^2 \ ,$$

gdzie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2 \leq \sqrt{x}\}$.
Zadanie 6. Niech $f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $x \in [0, 1]$. Obliczyć pole powierzchni S powstałej w wyniku pełnego obrotu wykresu funkcji f wokół osi OX.
Zadanie 7. Oblicz średnią wartość funkcji

a) $f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})^2$,

b) $g(\boldsymbol{x}) = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, OZ)^2$

na torusie $\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$, gdzie przyjmujemy $R > r > 0$.

Zadanie 8. Na powierzchni walca $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$ leży zbiór A, mierzalny względem miary powierzchniowej σ_2 na W. Połóżmy $A_{<t} := A \cap \{z < t\}$ i zdefinujmy $f(t) := \sigma_2(A_{<t})$. Wykaż, że

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_A (1 - z)\mathrm{d}\sigma_2$$

Zadanie 9. (trudniejsze) Rozważmy krzywą gładką $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ zawartą w płaszczyźnie $z = h$ i stożek powstały przez połączenie punktów tej krzywej z punktem $(0, 0, 0)$. Wykaż, że powierzchnia tak otrzymanego stożka jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2}\, h\, l(\gamma)$, gdzie $l(\gamma)$ oznacza długość wyjściowej krzywej. Znajdź wszystkie krzywe dla których zachodzi równość.

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. *Rozwiązanie:* Rozważmy parametryzację krzywej

$$\gamma : t \mapsto (r\cos\beta\cos\phi, r\cos\beta\sin\phi, r\sin\beta)(t) \ .$$

Pochodna wynosi

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) =& \dot{r}\cos\beta\cos\phi - \dot{\beta}\ r\sin\beta\cos\phi - \dot{\phi}\ r\cos\beta\sin\phi,\\ \dot{y}(t) =& \dot{r}\cos\beta\sin\phi - \dot{\beta}\ r\sin\beta\sin\phi + \dot{\phi}r\cos\beta\cos\phi,\\ \dot{z}(t) =& \dot{r}\sin\beta - \dot{\beta}\ r\cos\beta \ .\end{aligned}$$

Stąd

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2 = \ldots = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2\left(\dot{\beta}(t)^2 + \cos^2(\beta(t))\dot{\phi}(t)^2\right) \ .$$

Po scałowaniu dostajemy tezę.

Zadanie 2. *Rozwiązanie:* a) $\dot{\gamma}(t) = [3, 6t, 6t^2]$, wobec czego

$$\sqrt{\det(\mathrm{d}\gamma(t)^T\mathrm{d}\gamma(t))} = \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{3^2 + (6t)^2 + (6t^2)^2} = 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 3\sqrt{(1+2t^2)^2} = 3(1+2t^2) \ .$$

Musimy zatem policzyć całkę

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 \ \mathrm{d}\sigma_1 = \int_0^1 1\cdot 3(2t^2+1)\ \mathrm{d}t = 3\left(\frac{2}{3}t^2 + t\right)\Big|_0^1 = 5 \ .$$

Środek masy liczymy podobnie

$$\langle \boldsymbol{r}\rangle = \frac{1}{l(\gamma)}\int_\gamma [x,y,z]\ \mathrm{d}\sigma_1 = \frac{1}{5}\int_0^1 [3t, 3t^2, 2t^3]\ 3(1+2t^2)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{5}\left[9\left(\frac{2}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2\right), 9\left(\frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right), 6\left(\frac{2}{6}t^6 + \frac{1}{4}t^4\right)\right]\Bigg|_0^1 = \left(\frac{9}{5}, \frac{33}{25}, \frac{7}{10}\right) \ .$$

b) $\dot{\eta}(t) = e^{-t}[-\sin t - \cos t, \cos t - \sin t, -1]$, stąd $\|\dot{\eta}(t)\| = \sqrt{e^{-2t}3} = \sqrt{3}e^{-t}$. Wobec tego

$$l(\eta) = \int_\eta 1\ \mathrm{d}\sigma_1 = \int_{\mathbb{R}_+}\sqrt{3}e^{-t}\ \mathrm{d}t = \sqrt{3} \ .$$

Zauważmy, że $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(A\cos t + B\sin t)e^{-2t}\right] = ((-2A+B)\cos t + (-A-2B)\sin t)e^{-2t}$, skąd $\int \cos t\ e^{-2t}\ \mathrm{d}t = \left(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t\right)e^{-2t}$ oraz $\int \sin t\ e^{-2t}\ \mathrm{d}t = \left(-\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t\right)e^{-2t}$. Wobec tego środek masy to

$$\langle \boldsymbol{r}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t}(\cos t, \sin t, 1)\sqrt{3}e^{-t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}(\cos t, \sin t, 1)e^{-2t}\ \mathrm{d}t = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) \ .$$

Zadanie 3. *Rozwiązanie:* Rozważmy parametryzację torusa

$$\Phi : (\alpha, \beta) \longmapsto (R\cos\alpha, R\sin\alpha, r\cos\beta, r\sin\beta) \ ,$$

gdzie $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$. Mamy $\boldsymbol{v}_1 := \mathrm{d}\Phi[e_\alpha] = [-\sin\alpha, \cos\alpha, 0, 0]$ oraz $\boldsymbol{v}_2 := \mathrm{d}\Phi[e_\beta] = r[0, 0, -\sin\beta, \cos\beta]$, skąd $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle = R^2$, $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = 0$ oraz $\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\rangle = r^2$. Stąd już łatwo wyliczymy, że odpowiedni wyznacznik Gramma równy $r \cdot R$. Zatem

$$\sigma_2(T) = \int_{(0,2\pi)^2} r\cdot R\ \mathrm{d}^2(\alpha\beta) = 2\pi R\cdot 2\pi r \ .$$

Co ciekawe dostaliśmy taki sam wynik jak dla torusa w $\mathbb{R}^3$!

Zadanie 4. *Rozwiązanie:* Mamy naturalną parametryzację powierzchni σ

$$\Phi : (x,y) \longmapsto (x, y, e^x + e^{-x} + \sqrt{3}y) \ ,$$

gdzie $0 < y < x \leq 1$. Policzmy pochodną tej parametryzacji $e_1 ;= \mathrm{d}\Phi[e_x] = [1, 0, e^x - e^{-x}]$ i $e_2 := \mathrm{d}\Phi[e_y] = [0, 1, \sqrt{3}]$. Stąd $\langle e_1, e_1\rangle = e^{2x} + e^{-2x} - 1$, $\langle e_1, e_2\rangle = \sqrt{3}(e^x - e^{-x})$ oraz $\langle e_2, e_2\rangle = 4$. Stąd wyznacznik Gramma wynosi $4\left(e^{2x} + e^{-2x} - 1\right) - 3(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x} = (e^x + e^{-x})^2$. Pozostaje policzyć całkę

$$\sigma_2(\Sigma) = \int_{0<y<x\leq 1} (e^x + e^{-x}) \ \mathrm{d}^2(x,y) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 \int_0^x (e^x + e^{-x}) \ \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x(e^x + e^{-x}) \ \mathrm{d}x =$$
$$\left(xe^x - e^x - xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^1 = \left(e - e - \frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (0 - 1 - 0 - 1) = 2 - \frac{2}{e} \ .$$

Zadanie 5. *Rozwiązanie:* Rozważana powierzchnia jest wykresem funkcji $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ nad zbiorem $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{x}\}$. Z postaci zbioru widać, że wygodnie będzie przejść do współrzędnych biegunowych $x = r \ \cos\phi$, $y = r \ \sin\phi$. Wówczas nasza parametryzacja powierzchni Σ ma postać

$$\Phi : (r,\phi) \longmapsto \left(r \ \cos\phi, r \ \sin\phi, \frac{r^2}{2}\right) \ ,$$

a jej dziedziną jest zbiór $U = \{(r,\phi) \mid r^3 \leq \cos\phi, \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\}$. Warunek na kąt ϕ odpowiada warunkowi $\cos\phi > 0$. Policzmy wyznacznik Gramma odpowiedniej parametryzacji: $e_1 := \mathrm{d}\Phi[e_r] = [\cos\phi, \sin\phi, r]$, $e_2 := \mathrm{d}\Phi[e_\phi] = r[-\sin\phi, \cos\phi, 0]$. Mamy $\langle e_1, e_1\rangle = 1 + r^2$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ oraz $\langle e_2, e_2\rangle = r^2$, skąd odpowiedni wyznacznik wynosi $r\sqrt{1+r^2}$. Pozostaje policzyć całkę:

$$\int_\Sigma \sqrt{\frac{z}{1+2z}} \mathrm{d}\sigma^2 = \int_U \sqrt{\frac{\frac{r^2}{2}}{1+r^2}} \ r\sqrt{1+r^2} \ \mathrm{d}^2(r,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_U r^2 \ \mathrm{d}^2(r,\phi) \overset{\text{Fub.}}{=}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\{r^3<\cos\phi\}} r^2 \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cos\phi \ \mathrm{d}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \ .$$

Zadanie 6. *Rozwiązanie:* Skorzystamy z reguły Pappusa-Guldina opisującej pole figury powstałej przez obrót wykresu funkcji:

$$\sigma_2(S) = 2\pi \int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \ \mathrm{d}x \ .$$

W naszej sytuacji $f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, skąd $f'(x) = \frac{3}{2} \ (1 - x^{2/3})^{1/2} \ \frac{2}{3} \ \left(-x^{-1/3}\right) = \frac{(1-x^{2/3})^{1/2}}{-x^{1/3}}$, a więc $1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{(1-x^{2/3})}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^{2/3}}$. Policzmy teraz pole powierzchni:

$$\sigma_2(S) = 2\pi \int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{1+f'(x)^2} \ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} \ x^{-1/3} \ \mathrm{d}x = \left| y = 1 - x^{2/3}, \ \mathrm{d}y = -\frac{2}{3} \ x^{-1/3}\mathrm{d}x \right| =$$
$$2\pi \int_1^0 (-\frac{3}{2}) y^{3/2} \ \mathrm{d}y = 2\pi \ \frac{3}{2} \ \frac{2}{5} \ y^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{6}{5}\pi \ .$$

Zadanie 7.

Rozwiązanie: Musimy policzyć całki

$$\langle f\rangle_{\mathbb{T}^2} = \frac{1}{\sigma_2(\mathbb{T}^2)} \int_{\mathbb{T}^2} f \ \mathrm{d}\sigma_2 \qquad \text{oraz} \qquad \langle g\rangle_{\mathbb{T}^2} = \frac{1}{\sigma_2(\mathbb{T}^2)} \int_{\mathbb{T}^2} g \ \mathrm{d}\sigma_2 \ ,$$

gdzie jak już wiemy z ćwiczeń $\sigma_2(\mathbb{T}^2) = 4\pi^2 R \ r$.

Wprowadźmy standardową parametryzację torusa

$$\Phi : (\alpha, \beta) \longmapsto ((R + r\cos\beta)\cos\alpha, (R + r\cos\beta)\sin\alpha, r\sin\beta) \ ,$$

gdzie $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$. Odpowiadający jej pierwiastek z wyznacznika Gramma to (wiedza z ćwiczeń) $\sqrt{G_\Phi(\alpha,\beta)} = R\,r$. Z kolei mamy $f(\boldsymbol{x}) = x^2+y^2+z^2$ oraz $g(\boldsymbol{x}) = x^2+y^2$, co na parametryzacji daje

$$f(\Phi(\alpha,\beta)) = (R + r\cos\beta)^2 + r^2\sin^2\beta = R^2 + r^2 + 2Rr\cos\beta \quad \text{oraz}$$
$$g(\Phi(\alpha,\beta)) = (R + r\cos\beta)^2 = R^2 + r^2\cos^2\beta + 2R\,r\cos\beta\ .$$

Pozostaje policzyć całki (korzystamy z faktu, że $\int_0^{2\pi}\cos\beta\ \mathrm{d}\beta = 0$ oraz $\int_0^{2\pi}\cos^2\beta\ \mathrm{d}\beta = \pi$):

$$\int_{\mathbb{T}^2} f\ \mathrm{d}\sigma_2 = \int_{(0,2\pi)^2} f(\Phi(\alpha,\beta))\ \sqrt{G_\Phi(\alpha,\beta)}\ \mathrm{d}^2(\alpha,\beta) = \int_{(0,2\pi)^2}\left(R^2+r^2+2Rr\cos\beta\right)\ R\ r\ \mathrm{d}^2(\alpha,\beta) = 4\pi^2 R\ r(R^2+r^2+0) \qquad \text{oraz}$$

$$\int_{\mathbb{T}^2} g\ \mathrm{d}\sigma_2 = \int_{(0,2\pi)^2} g(\Phi(\alpha,\beta))\ \sqrt{G_\Phi(\alpha,\beta)}\ \mathrm{d}^2(\alpha,\beta) = \int_{(0,2\pi)^2}\left(R^2+r^2\cos^2\beta+2Rr\cos\beta\right)\ R\ r\ \mathrm{d}^2(\alpha,\beta) = 4\pi^2 R\ r\left(R^2+\frac{r^2}{2}\right)\ .$$

Stąd ostatecznie

$$\langle f\rangle_{\mathbb{T}^2} = R^2 + r^2 \qquad \text{oraz} \qquad \langle g\rangle_{\mathbb{T}^2} = R^2 + \frac{r^2}{2}\ .$$

Zadanie 8. *Rozwiązanie:* Rozważmy parametryzację walca $\Psi : (\phi, z) \mapsto (\cos\phi, \sin\phi, z)$, gdzie $\phi \in (0, 2\pi)$ oraz $z \in [0,1]$. Różniczkując otrzymujemy $e_1 := \mathrm{d}\Psi[e_\phi] = [-\sin\phi, \cos\phi, 0]$ oraz $e_2 := \mathrm{d}\Psi[e_z] = [0,0,1]$, skąd $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = 1$ i $\langle e_1, e_2\rangle = 0$, a więc odpowiedni wyznacznik Gramma wynosi 1. Wówczas

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\left[\int_W \chi_{A_{<t}}\ \mathrm{d}\sigma_2\right]\mathrm{d}t = \int_0^1\int_{(0,2\pi)\times(0,1)}\chi_{A_{<t}}\ 1\ \mathrm{d}^2(\phi,z)\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\int_0^t\int_0^{2\pi}\chi_A(\phi,z)\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t =$$
$$\Big|0<z<t<1 \text{ stąd } t\in(z,1) \text{ dla } z\in(0,1)\Big| \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^1\left(\int_z^1\int_0^{2\pi}\chi_A(\phi,z)\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}z =$$
$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-z)\chi_A(\phi,z)\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}z = \int_W(1-z)\chi_A\ \mathrm{d}\sigma_2 = \int_A(1-z)\ \mathrm{d}\sigma_2\ .$$

Zadanie 9. *Rozwiązanie:* Rozważmy dowolną parametryzację $t \mapsto (x(t), y(t), h)$ krzywej γ, gdzie $t \in [a,b]$. Łatwo się przekonać, że $\Phi : (t,z) \mapsto \left(\frac{z}{h}x(t), \frac{z}{h}y(t), z\right)$, gdzie $(t,z) \in K = [a,b]\times[0,h]$ jest parametryzacją powierzchni stożka. Obliczmy odpowiadający jej wyznacznik Gramma. Mamy $e_1 := \mathrm{d}\Phi[e_t] = \left[\frac{z}{h}x'(t), \frac{z}{h}y'(t), 0\right]$ oraz $e_2 := \mathrm{d}\Phi[e_z] = \left[\frac{1}{h}x(t), \frac{1}{h}y(t), 1\right]$, a zatem $\langle e_1, e_1\rangle = \frac{z^2}{h^2}(x'(t)^2 + y'(t)^2)$, $\langle e_1, e_2\rangle = \frac{z}{h^2}(x(t)x'(t) + y'(t)y(t))$ i $\langle e_2, e_2\rangle = \frac{1}{h^2}(x(t)^2+y(t)^2)+1$. Skąd

$$\mathrm{Gramm}(\Phi) = \langle e_1,e_1\rangle\langle e_2,e_2\rangle - \langle e_1,e_2\rangle^2 = \frac{z^2}{h^2}\left[(x')^2+(y')^2\right]\left[\frac{1}{h^2}(x^2+y^2)+1\right] - \frac{z^2}{h^4}\left(x\ x'+y'\ y\right)^2 =$$
$$\frac{z^2}{h^4}\left[((x')^2+(y')^2)(x^2+y^2) - \left(x\ x'+y'\ y\right)^2\right] + \frac{z^2}{h^2}\left[(x')^2+(y')^2\right] =$$
$$\frac{z^2}{h^4}\left[(x')^2y^2+(y')^2x^2-2x\ x'\ y'\ y\right] + \frac{z^2}{h^2}\left[(x')^2+(y')^2\right] = \frac{z^2}{h^4}\left[(x')y-(y')x\right]^2 + \frac{z^2}{h^2}\left[(x')^2+(y')^2\right]\ .$$

Wzór na pole powierzchni daje nam zatem

$$\sigma^2(S) = \int_K\sqrt{\frac{z^2}{h^4}\left[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right]^2 + \frac{z^2}{h^2}\left[x'(t)^2+y'(t)^2\right]}\ \mathrm{d}^2(t,z) \geq$$
$$\int_K\frac{z}{h}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\ \mathrm{d}^2(t,z) = \frac{1}{h}\int_0^h z\ \mathrm{d}z\cdot\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}h\ l(\gamma)\ .$$

Równość zachodzi gdy $x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = 0$. Skąd $0 = \frac{x'}{x} - y'y = (\ln x)' - (\ln y)'$. Zatem $\ln x - \ln y = \text{const}$, stąd $\frac{x}{y} = \text{const}$, czyli γ jest prostą przechodzącą przez $(0,0)$.