Zadania gwiazdką AM II.2 (aktualizacja: 14 maja 2020)

Zadanie 1. ($*$) Oblicz całkę (nie korzystając z wiedzy z analizy zespolonej)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \ .$$

Zadanie 2. ($*$) Rozważmy prostokąt P o bokach $a \times b$ i rodzinę kul $B_i := B(\boldsymbol{a}_i, r_i) \subset P$, gdzie $i = 1, 2, 3, \ldots$. Załóżmy, że kule B_i pokrywają P z dokładnością do zbioru miary zero (tzn. $\lambda^2(P \setminus \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = 0$). Wykaż, że $\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i = +\infty$.

Zadanie 3. ($*$) Prostokąt $P \subset \mathbb{R}^2$ jest skończoną sumą prostokątów, z których każdy ma co najmniej 1 bok o długości całkowitej. Wykaż, że co najmniej jeden z boków P ma długość będącą liczbą całkowitą.

Zadanie 4. ($*/2$) Wykaż, że dowolna 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$ jest postaci

$$\omega = c \cdot \theta + \mathrm{d}f \ ,$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest stałą, $\theta = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, zaś $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$ jest pewną funkcją gładką.

Zadanie 5. ($*/2$) Wykaż, że jeśli $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym i spójnym, zaś forma $\omega \in \Omega^1(U)$ ma własność niezależności całki od drogi, to ω jest dokładna w U.

Zadanie 6. ($*/2$) Funkcje $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są ciągłe w otoczeniu punktu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ i różniczkowalne w tym punkcie. Wykaż, że

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{1}{r^2} \int_{S(\boldsymbol{a},r)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \pi \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\boldsymbol{a}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\boldsymbol{a}) \right) \ .$$

$S(\boldsymbol{a}, r)$ oznacza okrąg o promieniu r i środku w $\boldsymbol{a}$ zorientowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Uwaga: nie zakładamy, że P i Q są różniczkowalne w otoczeniu $\boldsymbol{a}$, a więc nie można powoływać się na twierdzenie Greena.