AM II.2 2019/20 (gr 3).

Temat 1: Całka Lebesgue'a

1.1. Przejścia graniczne pod znakiem całki

(25 lutego 2020)

Definicja. *Funkcją schodkową* w $\mathbb{R}^k$ nazywamy funkcję postaci $u = \sum_{\text{sk.}} c_i \chi_{I_i}$, gdzie I_i są kostkami w $\mathbb{R}^k$, zaś $c_i \in \mathbb{R}$. Piszemy $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$. *Całką z funkcji schodkowej* u nazywamy liczbę $\int_{\mathbb{R}^k} u = \sum_i c_i \cdot l_k(I_i)$, gdzie $l_k(I)$ oznacza k-wymiarową miarę kostki I.

Funkcję $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ nazywamy *całkowalną w sensie Riemanna* (albo *R-całkowalną*) gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją funkcje schodkowe u i v takie, że $u \leq f \leq v$ oraz $\int_{\mathbb{R}^k}(v-u), < \varepsilon$. Innymi słowy funkcje R-całkowalne można przybliżać z góry i dołu funkcjami schodkowymi z dowolną dokładnością. *Całką z funkcji* f nazwiemy liczbę:

$$\oint_{\mathbb{R}^k} f = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^k} u \mid u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \text{ i } u \leq f\right\} = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^k} v \mid v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \text{ i } f \leq v\right\} .$$

Następujące twierdzenie charakteryzuje funkcje R-całkowalne

Twierdzenie. *Funkcja $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy gdy*

- *f ma zwarty nośnik (tj. zbiór $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ jest zawarty w penej ograniczonej kostce),*
- *f jest ograniczona,*
- *f jest ciągła poza zbiorem l_k-miary zero.*

Zadanie 1. Wykaż, że funkcja $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

Ogólniejsza definicja całki w sensie Lebesgue'a pozwala znacznie rozszerzyć klasę funkcji które umiemy scałkować

Definicja. Funkcja $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ należy do klasy $\mathcal{S}^\uparrow(\mathbb{R}^k)$ gdy istnieje rosnący ciąg funkcji schodkowych u_i $\underline{\text{o wspólnie ograniczonych całkach}}$ zbieżny do f prawie wszędzie. *Całkę* z takiej funkcji określamy jako

$$\int_{\mathbb{R}^k} g = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^k} u \mid u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \text{ i } u \leq g \text{ p.w.}\right\} .$$

Funkcję $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ nazwiemy *całkowalną w sensie Lebesgue'a* (albo *L-całkowalną*) gdy istnieją funkcje $g, h \in \mathcal{S}^\uparrow(\mathbb{R}^k)$ takie, że $f = g - h$ p.w. Klasę funkcji L-całkowalnych będziemy oznaczali symbolem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$. *Całką Lebesgue'a z funkcji* f nazwiemy liczbę

$$\int_{\mathbb{R}^k} f = \int_{\mathbb{R}^k} g - \int_{\mathbb{R}^k} h .$$

Kilka własności funkcji L-całkowalnych:

- *funkcja L-całkowalna to w istocie klasa równoważności funkcji, które utożsamiamy gdy są równe poza zbiorem miary zero.*

- *f jest L-całkowalna wtedy i tylko wtedy $|f|$ jest L-całkowalna.*
- *Jeśli f i g są L-całkowalne to również funkcje $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $f \pm g$, f_+, f_- są L-całkowalne*
- *każda funkcja R-całkowalna jest automatycznie L-całkowalna i obie całki są równe. (Uwaga! Nie dotyczy to w ogólności niewłaściwych całek Riemanna.)*

Zadanie 2. Wykaż, że funkcja $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a. **Zadanie 3.** Czy funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na $[1, +\infty)$?

Konstrukcja całki Lebesgue'a umożliwia przechodzenie do granicy pod znakiem całki o ile umiemy kontrolować ciąg funkcji podcałkowych. Mówią o tym następujące dwa ważne twierdzenia.

Twierdzenie (Levy'ego o zbieżności monotonicznej). *Niech $f_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ będzie rosnącym (p.w) ciągiem funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a, t.j.*

$$f_1(\boldsymbol{x}) \leq f_2(\boldsymbol{x}) \leq \ldots \leq f_n(\boldsymbol{x}) \leq \ldots \quad \text{dla p.w. } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \ .$$

Załóżmy dodatkowo, że całki $\int_{\mathbb{R}^k} f_n$ są wspólnie ograniczone. Wówczas

- *jeśli istnieje granica skończona $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n$ to granica punktowa $f(\boldsymbol{x}) := \lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x})$ jest skończona p.w, a ponadto f funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a i zachodzi równość*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n = \int_{\mathbb{R}^k} f = \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n\to\infty} f_n .$$

- *jeśli granica $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n$ jest nieskończona to granica punktowa $f(\boldsymbol{x}) := \lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x})$ nie jest całkowalna w sensie Lebesgue'a.*

Powyższe twierdzenie jest wzmocnioną wersją twierdzenia które pojawiło się na wykładzie.

Twierdzenie (Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej). *Załóżmy, że funkcje L-całkowalne $f_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ są wspólnie ograniczone przez funkcję g całkowalną w sensie Lebesgue'a (tzw. majorantę), tzn.*

$$|f_n(\boldsymbol{x})| < g(\boldsymbol{x}) \quad \text{dla p.w. } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k .$$

Wówczas granica punktowa $f(\boldsymbol{x}) := \lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x})$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a i ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n = \int_{\mathbb{R}^k} f = \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n\to\infty} f_n \ .$$

Zadanie 4. Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \chi_{[1,+\infty)}(x)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a i oblicz jej całkę.

Zadanie 5. Wykaż, że funkcja $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, której (niewłaściwa) całka Riemanna jest skończona jest całkowalna w sensie Lebesgue'a oraz że obie całki są równe

$$\int_{\mathbb{R}} f = \oint_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x \ .$$

Zadanie 6. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty (1+x^{2n})^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\ .$$

`Zadania domowe na 27 lutego 2020:`

Zadanie 7. Dokończyć ostatnie zadanie – uzasadnić prawidłowość przejścia granicznego pod znakiem całki.

Zadanie 8. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x\ .$$

`(27 lutego 2020)`

Zadanie 9. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\mathrm{d}x\ .$$

Uzasadnij, dlaczego przejście do granicy pod znakiem całki daje zły wynik.

Zadanie 10. Rozważmy funkcję $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$. Załóżmy, że f jest ciągła poza zbiorem miary zero i ograniczona (*ogólniej: f jest mierzalna*), oraz że istnieje funkcja $g\in L(\mathbb{R}^k)$ taka, że $|f(\boldsymbol{x})|\le g(\boldsymbol{x})$ dla p.w. $\boldsymbol{x}$. Wykaż, że $f\in L(\mathbb{R}^k)$. *Na ćwiczeniach zabrakło założenia, o ograniczoności f.*

Zadanie 11. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 12. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2\pi n}^{2\pi n}\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\exp(-2x^2)\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 13. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{(\sin x+\cos x)^n}{1+(\sin x+\cos x)^{2n}}e^{-2x}\mathrm{d}x\ .$$

1.2. Twierdzenie Fubini'ego

Twierdzenie (Fubini'ego)**.** *Niech $f:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a. Punkt w $\mathbb{R}^{n+k}$ oznaczmy jako parę $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\simeq\mathbb{R}^{n+k}$. Wówczas funkcja $\boldsymbol{x}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0)$ należy do $L(\mathbb{R}^n)$ dla p.w $\boldsymbol{y}_0\in\mathbb{R}^k$, zaś funkcja $\boldsymbol{y}\mapsto f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})$ należy do $L(\mathbb{R}^k)$ dla p.w $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$. Ponadto*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}^{n+k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}^n(\boldsymbol{x})\right)\mathrm{d}^k(\boldsymbol{y})=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}^k(\boldsymbol{y})\right)\mathrm{d}^n(\boldsymbol{x})\ .$$

Innymi słowy całkowanie po parze zmiennych $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ sprowadza się do iterowanego całkowania (w dowolnej kolejności) po każdej ze zmiennych z osobna.

Uwaga! *Zamiast $f \in L(\mathbb{R}^{n+k})$ w tw. Fubini'ego możemy założyć, że funkcja f jest ciągła (ogólniej: mierzalna) i nieujemna. Wówczas funkcje $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)$ oraz $\boldsymbol{y} \mapsto f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y})$ są mierzalne dla, odpowiednio, p.w. $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^k$ i $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Równość całek iterowanych nadal obowiązuje, z tym, że wynikiem może być $+\infty$ i wówczas rozważana funkcja f nie jest całkowalna.*

Zadanie 14. Oblicz całkę

$$\int_{[1,2]\times[0,3]} e^{2x-y} \mathrm{d}^2(x,y) \ .$$

`Zadania domowe na 5 marca:`

Zadanie 15. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\ln(x^n + 2^n)}{nx^2} \mathrm{d}x \ .$$

Zadanie 16. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \ .$$

Zadanie 17. Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna i jej pochodna f' jest ograniczona na $[a,b]$. Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej wykaż, że

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \ .$$

`(5 marca 2020)`

Zadanie 18. Oblicz całkę z funkcji $f(x,y) = (ax + by)$ na zbiorze $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y, y^2 < x\}$.

Zadanie 19. Kula jednostkowa $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ została przecięta płaszczyzną $\{z = a\}$. Oblicz objętości powstałych części.

Zadanie 20. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu $(x^2 + y^2)^{3/2} = y$.

Twierdzenie (O zamiannie zmiennych w całce)**.** *Rozważmy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$, dyfeomorfizm $\Phi : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ oraz funkcję f całkowalną na zbiorze $\Phi(U)$. Wówczas funkcja $\boldsymbol{x} \mapsto f(\Phi(\boldsymbol{x})) \cdot |\det \mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{x})|$ jest całkowalną na U, oraz zachodzi równość*

$$\int_U f(\Phi(\boldsymbol{x})) \cdot |\det \mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{x})| \mathrm{d}^n(\boldsymbol{x}) = \int_{\Phi(U)} f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}^n(\boldsymbol{y}) \ .$$

Zadanie 21. Zrób poprzednie zadanie używając podstawienia biegunowego $\Phi(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$.

`Zadania domowe na 10 marca 2020:`

Zadanie 22. Wyznacz jakobian przekształcenia sferycznego

$$\Phi(r,\theta,\beta) = (r\cos\theta\cos\beta, r\sin\theta\cos\beta, r\sin\beta)$$

i użyj uzyskanego wyniku do policzenia objętości kuli trójwymiarowej $B(\mathbf{0},R) \subset \mathbb{R}^3$.

Zadanie 23. Oblicz całkę

$$\int_{\{x^2+y^2\le y\}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}\lambda^2(x,y) \ .$$

`Zadanie pisemne na 12 marca 2020:`

Zadanie 24. Oblicz miarę zbioru

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 \le 4(x^2-y^2)\} \ .$$

`(10 marca 2020)`

Zadanie 25. Oznaczmy symbolem $A_{a,b}$ kwadrat $[a,a+1]\times[b,b+1] \subset \mathbb{R}^2$ i zdefiniujmy funkcję $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ następująco

$$f := \chi_{A_{0,0}} - \chi_{A_{0,1}} + \chi_{A_{1,1}} - \chi_{A_{1,2}} + \chi_{A_{2,2}} - \chi_{A_{2,3}} + \dots \ .$$

Czy jest prawdą, że

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \ ?$$

Czy wynik jest zgodny z twierdzeniem Fubini'ego?

Zadanie 26. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{\exp[x^2+y^2+z^2]}{n\sin\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{n}\right)} \mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) \ ,$$

gdzie $A = \{(x,y,z) \mid 0 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} < \sqrt[3]{z}\}$.

Zadanie 27. Oblicz całkę

$$\int_{\{|x-y|<1\}} \exp(-|x+y|)\mathrm{d}\lambda^2(x,y) \ .$$
