AM II.1 2019/2020 (gr. 2)
Rozwiązanie zadania o funkcji lipszycowskiej na pierścieniu

Zadanie 1. Funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ na zbiorze $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$ ma dobrze określone pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$ w P i ponadto spełnia w każdym punkcie dziedziny nierówności

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le 1 \quad \text{i} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 1 \ .$$

Rozstrzygnij, czy f spełnia warunek Lipschitza (z pewną stałą) w zbiorze P.

Rozwiązanie: Pokażemy, że f jest lipszycowska. Zasadniczy pomysł polega na użyciu twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji f obciętej do prostych $x = x_0$ oraz $y = y_0$. Wnioskujemy stąd, że

$$|f(x, y_0) - f(x', y_0)| \le \sup_{z \in [x,x']} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)\right| \cdot |x - x'| \le 1 \cdot |x - x'|$$

i analogicznie

$$|f(x_0, y) - f(x_0, y')| \le \sup_{z \in [y,y']} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)\right| \cdot |y - y'| \le 1 \cdot |y - y'| \ .$$

Wynika stąd łatwo, że jeśli dane dwa punkty $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in P$ możemy połączyć łamaną składającą się z odcinków równoległych do osi OX lub OY, to wartość różnicy $|f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{b})|$ szacuje się przez długość tej łamanej.

Definicja. *Łamaną schodkową* nazwiemy łamaną $\gamma = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ składającą się z odcinków równoległych do osi współrzędnościowych, tzn. $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_{i+1} = \{x_0\} \times [y, y']$ lub $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_{i+1} = [x, x'] \times \{y_0\}$. Długością łamanej nazywamy sumę długości jej odcinków składowych

$$\operatorname{len}(\gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}) \ .$$

Lemat 1. *Jeśli punkty $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in P$ można połączyć łamaną schodkową γ zawartą w P to*

$$|f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{b})| \le 1 \cdot \operatorname{len}(\gamma)$$

Powyższy fakt uzyskujemy dodając stronami oszacowania $|f(\boldsymbol{a}_i) - f(\boldsymbol{a}_{i+1})| \le 1 \cdot \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1})$ i korzystając po lewej stronie z nierówności trójkąta dla wartości bezwzględnej.
Aby dowieść lipszycowskości f wystarczy nam teraz pokazać następujący fakt

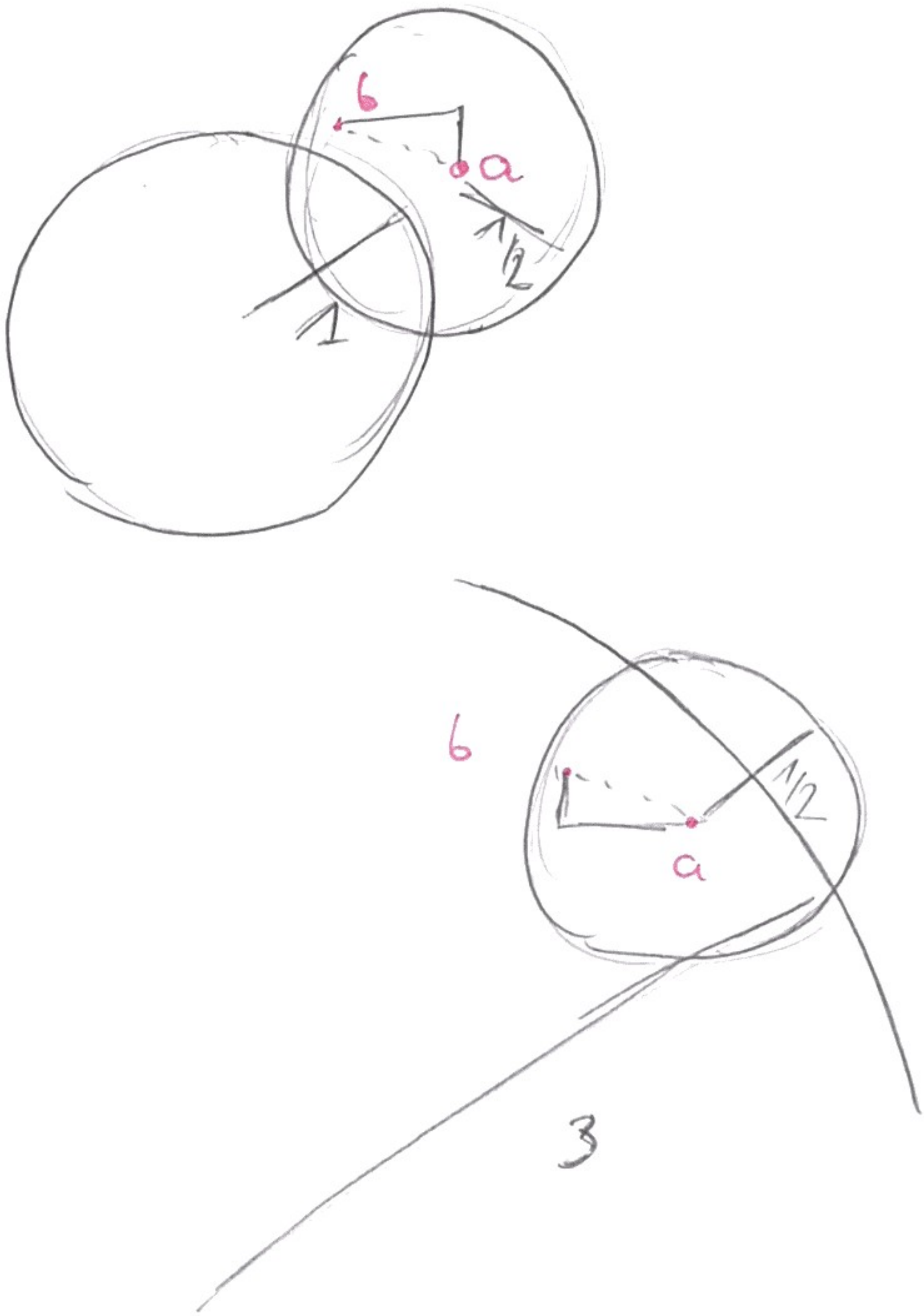
Lemat 2. *Dla dowolnych dwóch punktów $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in P$ istnieje łamana schodkowa $\gamma \subset P$ łącząca punkty $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ długości nie większej niż ustalona wielkrotność odległości punktów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, np.*

$$\operatorname{len}(\gamma) \le 24 \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \ .$$

Rozważmy dwa przypadki: Jeśli $\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < \frac{1}{2}$, wówczas łatwo skonstruować odpowiednią łamaną składającą się z dwóch odcinków, o długości nie większej niż $2 \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (rys. 1). W przypadku gdy $\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geq \frac{1}{2}$, każdy z punktów $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ możemy połączyć z odpowiadającym mu punktem węzłowym łamaną schodkową o długości nie większej niż 4, zaś każde dwa punkty węzłowe również połączymy łamaną schodkową o długości nie większej niż 4 (rys. 2). Zatem ostatecznie połączymy punkty $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ łamaną schodkową o długości nie większej niż $4 + 4 + 4 = 12 \leq 24 \cdot \frac{1}{2} \leq 24 \operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Co kończy dowód. $\square$

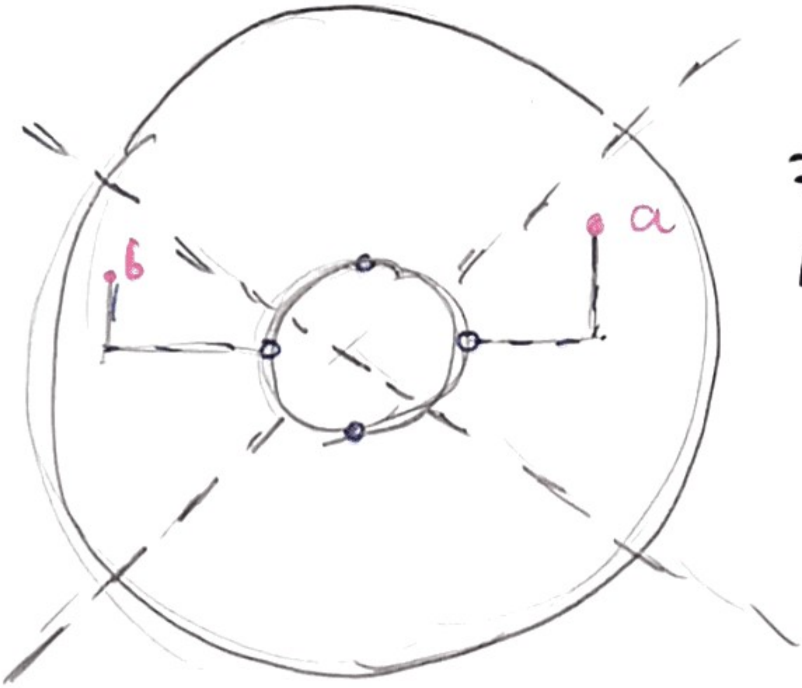
Uwaga! Jeśli założymy dodatkowo coś więcej o regularności P, na przykład, że jest różniczkowalna, wówczas możemy użyć wielowymiarowej wersji twierdzenia Lagrange'a (z wykładu) aby oszacować przyrosty f na odcinkach (odpowiednio, łamanych) innych niż równoległe do osi współrzędnościowych (odp. schodkowych). Wówczas można nieco uprościć dowód. Bez tego dodatkowego założenia nie mamy jednak innych narzędzi do porównywania wartości funkcji w różnych punktach niż jednowymiarowe twierdzenie Lagrange'a, które prowadzi do rozważania łamanych schodkowych.

Rys 1 (Łączenie płatów bliskich)

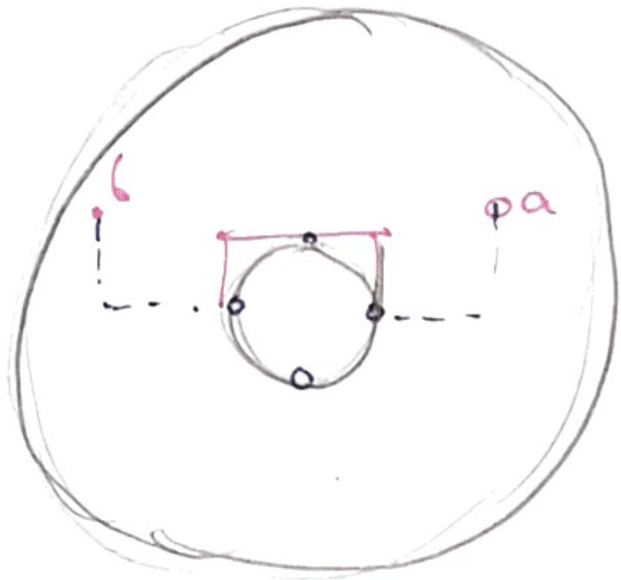


Rys 2 (Łączenie płatów dalekich)

(a)



Łączenie z punktami węzłowymi



Łączenie punktów węzłowych