AM II.1 2019/2020 (gr. 2)
Temat 7: Zbiory miary zero

(21 stycznia 2020)

Kostki, zbiory elementarne i zbiory miary zero.

Definicja. *Kostką* w $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór

$$I = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \prec x_i \prec b_i \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n\} .$$

Powyżej $\prec$ oznacza dowolną z nierówności $<$ lub $\leq$, zaś $a_i \leq b_i$ są liczbami rzeczywistymi.
n-wymiarową miarą kostki I nazywamy liczbę

$$l_n(I) := \Pi_{i=1}^n (b_i - a_i) .$$

Zbiorem elementarnym w $\mathbb{R}^n$ nazywamy skończoną sumę kostek (rozłącznych lub nie). Zbiory elementarne tworzą *pierścień zbiorów* (tj. suma, przecięcie i różnica dwóch zbiorów elementarnych jest zbiorem elementarnym), który zwyczajowo oznaczamy symbolem $\mathcal{E}$.
Jeśli zbiór $E \in \mathcal{E}$ przedstawimy jako sumę parami rozłącznych kostek $E = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$, gdzie $I_i \cap I_j = \emptyset$ (takie przestawienie jest zawsze możliwe), to *n-wymiarową miarę zbioru E* możemy zdefiniować jako

$$l_n(E) = \sum_{i=1}^{k} l_n(I_k) .$$

Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiorem l_n-miary zero gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna rodzina kostek $(I_s)_{s \in S}$ taka, że $A \subset \bigcup_{s \in S} I_s$ oraz $\sum_{s \in S} l_n(I_s) < \varepsilon$.

Innymi słowy zbiór miary zero to taki, który da się zamknąć w sumie kostek o dowolnie małej mierze.

Zadanie 1. Wykaż, że następujące zbiory są l_2-miary zero:

a) punkt w $\mathbb{R}^2$,

b) odcinek $[0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$,

c) prosta $x = 0$ w $\mathbb{R}^2$,

d) prosta $x = y$ w $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 2. Rozważmy przeliczalną rodzinę podzbiorów $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ w $\mathbb{R}^n$, z których każdy jest l_n-miary zero. Wykaż, że $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ również jest zbiorem λ_n-miary zero.

Zadanie 3. Wykaż, że zbiór $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ jest λ_1-miary zero.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli zbiór $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ pokryjemy skończoną liczbą przedziałów, to suma długości tych przedziałów jest nie mniejsza niż 1.

Zadanie 5. Rozważmy funkcję ciągłą $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wykaż, że jej wykres $\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem l_2-miary zero.

Zadanie 6. Rozważmy dyfeomorfizm (lub ogólniej przekształcenie klasy C^1) $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i zbiór l_n-miary zero $A \subset \mathbb{R}^n$. Wykaż, że obraz $\Phi(A)$ również jest zbiorem l_n-miary zero.

Zadanie domowe na 24 stycznia:

Dom 1. Dokończyć ostatnie zadanie. *Wskazówka*: Skorzystaj z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

Dom 2. Wykaż, że zbiór $A := \{(x, y) \mid x - y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ jest l_2-miary zero.

`(24 stycznia 2020)`

Zadanie 7. Rozważmy przekształcenie $\Phi : R^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ klasy C^1. Wykaż, że dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ jego obraz jest $\Phi(A)$ jest zbiorem l_{n+k}-miary zero.

Zadanie 8. Wykaż, że każda n wymiarowa rozmaitość zanurzona $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ jest zbiorem l_{n+k}-miary zero.

Zadanie 9. Wykaż, że zbiór $A := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2, r \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ jest l_2-miary zero.

Zadanie 10. Niech C oznacza zbiór tych liczb z przedziału $[0, 1]$, które mają rozwinięcie dziesiętne, w którym nie występuje cyfra 3. Wykaż, że C jest zbiorem miary zero. Wykaż, że C jest mocy kontinuum.

Zadanie 11. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb z przedziału $[0, 1]$ mających rozwinięcie dwójkowe w którym cyfra 0 nie występuje dwa razy pod rząd. Wykaż, że A jest zbiorem miary zero.

`Zadania dodatkowe:`

Zadanie 12. Jaka jest miara zbioru tych liczb z przedziału $[0, 1]$, które mają skończoną liczbę trójek w rozwinięciu dziesiętnym?

Zadanie 13. Wykaż, że jeśli przynajmniej jeden ze zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ jest l_1-miary zero to produkt $A \times B$ też jest l_2-miary zero.